

Remarque

Ces résultats signifient que :

- lorsque $a > 1$ et $\alpha > 0$, la suite (a^n) tend vers $+\infty$ « plus vite » que la suite (n^α) ;
- lorsque $\alpha > 0$, la suite (n^α) tend vers $+\infty$ « plus vite » que la suite $(\ln n)$.

Exemples

- On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^2} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n} = +\infty$.

- Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général : $u_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$.

$$\text{On a : } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}.$$

$$\text{Or : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 ; \text{ donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

- Calculer la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général : $v_n = n^3 - 2^{n+2}$.

$$\text{On a : } \forall n \in \mathbb{N}, v_n = 2^n \left(\frac{n^3}{2^n} - 4 \right).$$

$$\text{Or : } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{2^n} = 0 ; \text{ donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty.$$

Propriétés de comparaison

Les propriétés de comparaison concernant les fonctions sont applicables aux suites.

Propriétés 1

Soit (u_n) une suite.

- S'il existe une suite (v_n) telle que $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$,
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

- S'il existe une suite (v_n) telle que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$,
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

L'expression « $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang » signifie qu'il existe un entier naturel n_0 tel que :
 $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq v_n$.

Exemple

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général : $u_n = n^2 + \sin n$.

$$\text{On a : } \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n^2 - 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 1) = +\infty ; \text{ donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Propriétés 2

Soit (u_n) une suite et l un nombre réel.

- S'il existe deux suites (v_n) et (w_n) telles que $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang
et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$,
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.
- S'il existe une suite (v_n) telle que $|u_n - l| \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$,
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

La première propriété est souvent appelée « théorème des gendarmes ».

Elle reste valable lorsque l'on remplace l par $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple

Calculer la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général : $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k}$.

Soit k un entier naturel tel que : $1 \leq k \leq n$.

On a : $n^2 + 1 \leq n^2 + k \leq n^2 + n$; donc : $\frac{1}{n^2 + n} \leq \frac{1}{n^2 + k} \leq \frac{1}{n^2 + 1}$.

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + 1}$;

c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{n^2 + n} \leq v_n \leq \frac{n}{n^2 + 1}$.

Or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1} \right) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n^2 + n} \right) = 0$; donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

Propriété 3

Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes.

Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

Image d'une suite par une fonction

On admet la propriété suivante.

Propriété

Soit f une fonction, D_f son ensemble de définition et (u_n) une suite d'éléments de D_f .

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = l$.

Exemple

Calculer la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général : $v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Soit n un entier naturel non nul.

On a : $v_n = e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})}$.

Posons : $u_n = n \ln(1 + \frac{1}{n})$ et $f : x \mapsto e^x$.

On a : $v_n = f(u_n)$;

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1 ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = e.$$

Donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = e$.

Remarque

Cette propriété peut être utilisée pour démontrer qu'une fonction n'a pas de limite.

Ainsi, la fonction $f : x \mapsto \cos \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0.

En effet, considérons les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de termes généraux : $a_n = \frac{1}{2\pi n}$ et $b_n = \frac{1}{\pi + 2\pi n}$.

Ces deux suites convergent vers 0.

Si la fonction f admettait une limite en 0, on aurait : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n)$.

Or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = -1$; donc, f n'admet pas de limite en 0.

2.3. Limite d'une suite monotone

On sait qu'une fonction croissante et majorée (ou décroissante et minorée) sur $[a; +\infty[$ admet une limite finie en $+\infty$. On a des propriétés analogues pour les suites numériques.

Propriétés

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Remarques

- Ces propriétés restent valables lorsque la suite n'est monotone qu'à partir d'un certain rang.
- Elles permettent de démontrer l'existence de la limite d'une suite, sans en préciser la valeur.

Exemples

- Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = -\frac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

On démontre par récurrence que la suite (u_n) est croissante et majorée par 2.
On en déduit que cette suite est convergente.

- Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de terme général : $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2}$; donc, la suite (v_n) est croissante.

De plus : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}, \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k^2 - k}$; c'est-à-dire : $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \leq 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$.

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \leq 2 - \frac{1}{n} < 2$.

La suite (v_n) est croissante et majorée par 2 ; donc elle est convergente et sa limite l est telle que : $l \leq 2$.

Leibnitz a essayé en vain de calculer la somme $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{k^2} + \dots$

Bernoulli a démontré la convergence de la suite précédente et son élève Euler a démontré qu'elle converge vers $\frac{\pi^2}{6}$.

Remarques

- Toute suite croissante et non majorée a pour limite $+\infty$.
- Toute suite décroissante et non minorée a pour limite $-\infty$.

Exercices

- 2.a Dans chacun des cas suivants, préciser la fonction f telle que $u_n = f(n)$, puis déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

a) $u_n = n - \frac{1}{n+1}$

b) $u_n = \frac{3n^2 - 1}{(2n+1)^2}$

c) $u_n = n(e^{\frac{1}{n}} - 1)$

d) $u_n = \frac{\ln(1+n)}{1+\sqrt{n}}$

- 2.b Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme 2 et de raison $\frac{1}{3}$.

Étudier la convergence de la suite (u_n) et de la suite (v_n) de terme général : $v_n = \sum_{p=1}^n u_p$.

- 2.c Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

a) $u_n = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$

b) $u_n = 7(-0,75)^{n+1}$

c) $u_n = 25 + \left(\frac{\pi}{3}\right)^{2n}$

d) $u_n = 25 - \left(\frac{3}{\pi}\right)^n$

e) $u_n = \frac{n^2}{2^n}$

f) $u_n = \frac{n3^n}{4^n}$

- 2.d Dans chacun des cas suivants, utiliser les propriétés de comparaison pour étudier la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

a) $u_n = \cos n - n$

b) $u_n = n + (-1)^n \cos n$

c) $u_n = \ln n + (-1)^n$

d) $u_n = (-1)^n - 3^n$

Exercices

$$e) u_n = \frac{\sin n^3}{1+n}$$

$$f) u_n = 1 + \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$$

$$g) u_n = \frac{n(1 - \cos n)}{n^2 + 1}$$

$$h) u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \sin n.$$

2.e 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général :

$$u_n = \frac{n^2 \pi}{(n+1)^2}.$$

a) Déterminer la limite de cette suite.

b) En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général : $v_n = \cos u_n$.

2. Dans chacun des cas suivants, utiliser une méthode analogue pour déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son terme général.

$$a) v_n = \sqrt{\frac{n^2 + 1}{(n+1)^2}}$$

$$b) v_n = \ln \frac{1+n}{n^2}$$

$$c) v_n = \sqrt{\frac{1}{n - \ln n}}$$

$$d) v_n = \exp\left(\frac{1-n^2}{n}\right)$$

2.f Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général :

$$u_n = \sum_{p=0}^n \left(\frac{1}{p!}\right).$$

1. Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante et majorée par 3.

3. En déduire que cette suite est convergente.

2.g Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + 2}.$$

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < \frac{u_n}{2}$.

2. En déduire la limite de la suite (u_n) .

3 Compléments sur les suites

3.1. Suites définies par récurrence

Dans ce paragraphe, on se propose d'étudier les suites (u_n) définies par leur premier terme et une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction.

Introduction

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \left(2 - \frac{u_n}{4}\right)$.

Soit la fonction $f: x \mapsto x \left(2 - \frac{x}{4}\right)$, ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative et (Δ) la droite d'équation $y = x$.

- Construire sur (OI) les quatre premiers termes de la suite (u_n) et conjecturer la limite de cette suite.

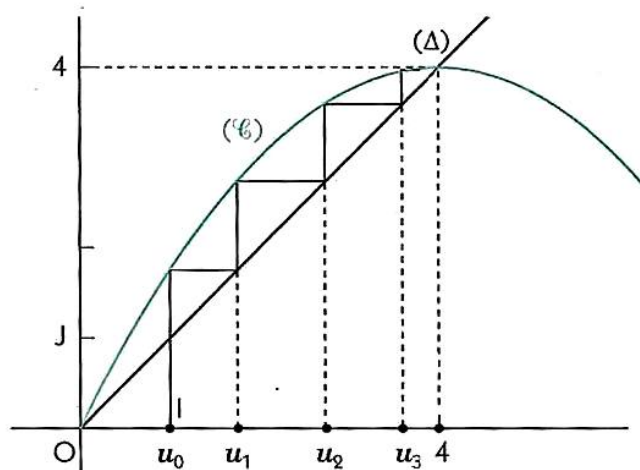
- Démontrer par récurrence que (u_n) est croissante et majorée par 4.

En déduire que (u_n) admet une limite l telle que : $l \leq 4$.

- Démontrer que : $l = l \left(2 - \frac{l}{4}\right)$.

(On pourra utiliser la relation : $u_{n+1} = u_n \left(2 - \frac{u_n}{4}\right)$.)

- En déduire que : $l = 4$.



Plus généralement, on a la propriété suivante.

Propriété

Soit (u_n) une suite dont le terme général vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction.

Si (u_n) converge vers l et si f est continue en l , alors $f(l) = l$.

Démonstration

On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$.

De plus : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{x \rightarrow l} f(x)$.

Or : f est continue en l ; donc : $\lim_{x \rightarrow l} f(x) = f(l)$.

On en déduit que : $f(l) = l$.

Remarques

- Toute solution de l'équation $f(x) = x$ est appelée « point fixe » de la fonction f .
- L'existence d'un point fixe pour une fonction f ne prouve pas la convergence d'une suite (u_n) dont le terme général vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$ (cf. exemple 3 ci-après).

Exemples d'études de suites définies par récurrence

1. Étudier la limite de la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$.

- Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}x + 2$, $(\mathcal{D})$ et (Δ) les droites d'équations respectives $y = f(x)$ et $y = x$.

Ces droites se coupent au point d'abscisse 4.

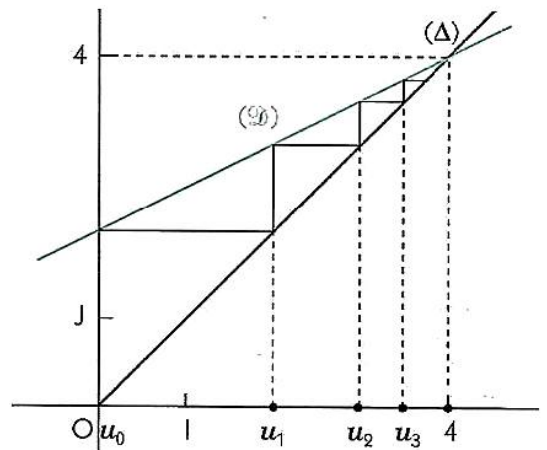
La construction sur (OI) des premiers termes de la suite (u_n) permet de conjecturer que cette suite est croissante et converge vers 4.

- L'équation $f(x) = x$ a une solution : 4 ; donc, si la suite (u_n) est convergente, elle converge vers 4.
- Démontrons que la suite (u_n) est convergente.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - 4 = \frac{1}{2}(u_n - 4)$;

on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - 4 = \frac{1}{2^n}(u_0 - 4)$.

Or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$; donc, la suite (u_n) converge vers 4.



2. Étudier la limite de la suite (v_n) définie par : $v_0 = \sqrt{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 2 + \frac{1}{v_n}$.

- Soit la fonction $g : x \mapsto 2 + \frac{1}{x}$, $(\mathcal{C}_g)$ sa courbe représentative et (Δ) la droite d'équation $y = x$.

La construction sur (OI) des premiers termes de la suite (v_n) permet de conjecturer que cette suite est convergente.

- L'équation $g(x) = x$ a deux solutions : $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$. Or, la suite (v_n) est positive ; donc, si la suite (v_n) est convergente, elle converge vers $1 + \sqrt{2}$.

- Démontrons que la suite (v_n) est convergente.

– On a : $v_0 \geq \sqrt{2}$

$$\forall k \in \mathbb{N}, v_k \geq \sqrt{2} \Rightarrow v_{k+1} \geq \sqrt{2}.$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq \sqrt{2}$.

– Appliquons l'inégalité des accroissements finis à la fonction g sur l'intervalle $[\sqrt{2} ; +\infty[$.

On a : $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$; donc : $\forall x \in [\sqrt{2} ; +\infty[$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

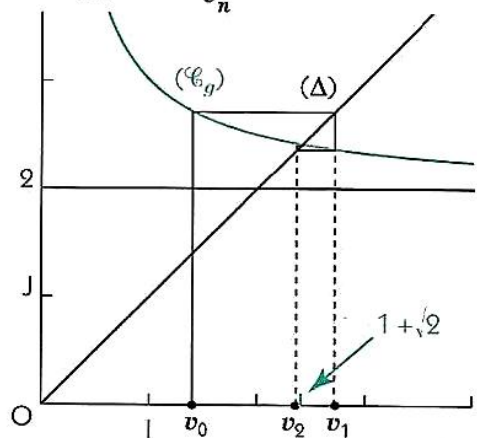
On obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, |g(v_n) - g(1 + \sqrt{2})| \leq \frac{1}{2} |v_n - (1 + \sqrt{2})|$;

c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}, |v_{n+1} - (1 + \sqrt{2})| \leq \frac{1}{2} |v_n - (1 + \sqrt{2})|$.

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, |v_n - (1 + \sqrt{2})| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |v_0 - (1 + \sqrt{2})|$;

c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}, |v_n - (1 + \sqrt{2})| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Donc, la suite (v_n) converge vers $1 + \sqrt{2}$.



3. Étudier la limite de la suite (w_n) définie par : $w_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = e^{w_n} - 1$.

• Soit la fonction $h : x \mapsto e^x - 1$, $(\mathcal{C}_h)$ sa courbe représentative et (Δ) la droite d'équation $y = x$.

La construction sur (OI) des premiers termes de (w_n) permet de conjecturer que cette suite a pour limite $+\infty$.

• On a : $h(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, h(x) > x$. Donc, (w_n) est croissante et 0 est l'unique point fixe de h .

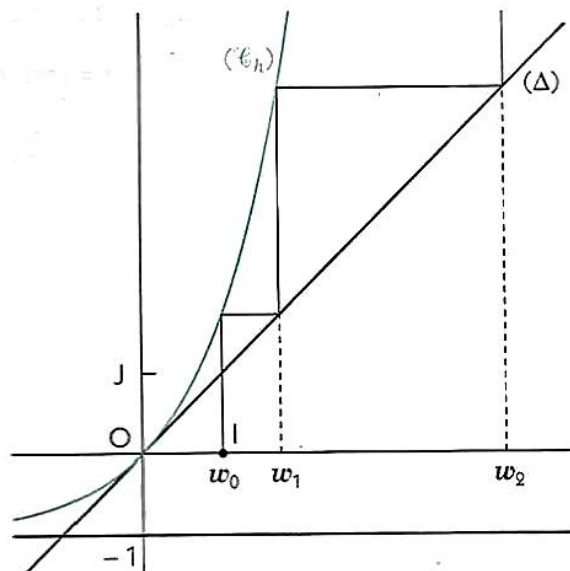
On en déduit que si la suite (w_n) est convergente, elle converge vers 0.

• Démontrons que la suite (w_n) n'est pas convergente et a pour limite $+\infty$.

– La suite (w_n) n'est pas convergente ; en effet, si elle l'était sa limite serait 0, ce qui est impossible car tous ses termes sont supérieurs à w_0 .

– La suite (w_n) est croissante ; donc elle n'admet pas de majorant, sinon elle serait convergente.

La suite (w_n) est croissante et non majorée ; elle a donc pour limite $+\infty$.



M

Pour étudier la limite d'une suite (u_n) dont le terme général vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$, on peut utiliser le procédé suivant :

- utiliser le graphique pour conjecturer le résultat ;
- résoudre l'équation $f(x) = x$;
- démontrer le résultat conjecturé.

3.2. Travaux dirigés

On a vu en classe de première, ainsi que dans le chapitre 9 (§ 3.4.), la détermination d'une valeur approchée des solutions d'une équation par balayage ou par dichotomie.

Nous donnons ici deux méthodes utilisant les suites numériques pour la résolution d'un tel problème.

1. Méthode du point fixe

On considère l'équation : $\ln(x+3) = x$.

1°) Démontrer que cette équation admet dans $\mathbb{R}_+$ une solution unique α comprise entre 1 et 2.

2°) On désigne par f la fonction $x \mapsto \ln(x+3)$ et par K l'intervalle $[1; 2]$.

a) Démontrer que : $f(K) \subset K$.

b) Démontrer que : $\forall x \in K, |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

3°) Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(u_n + 3)$.

a) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n} |u_0 - \alpha|.$$

En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

b) Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de α .

Solution

1°) Soit la fonction $h : x \mapsto x - \ln(x+3)$.

Cette fonction est dérivable sur $]-3; +\infty[$ et on a : $h'(x) = \frac{x+2}{x+3}$.

On en déduit que la restriction de h à $\mathbb{R}_+$ est une bijection croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $[-\ln 3; +\infty[$.

Donc, l'équation $x - \ln(x+3) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}_+$.

De plus, on a : $h(1) \approx -0,386$ et $h(2) \approx 0,390$; donc : $1 < \alpha < 2$.

2°) Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f .

a) f est une bijection croissante de $]-3; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

On a : $f(1) \approx -1,38$ et $f(2) \approx 1,61$; donc : $f(K) \subset K$.

b) f est deux fois dérivable sur $]-3; +\infty[$;

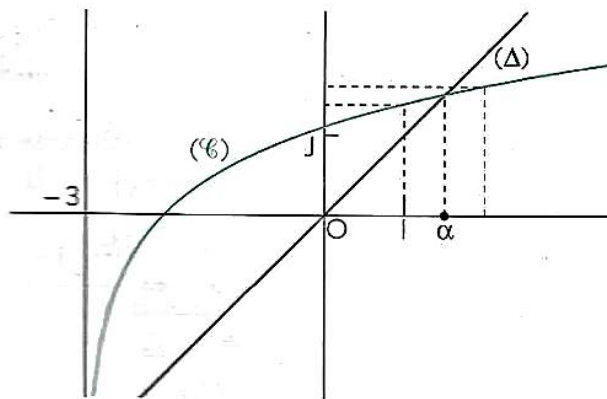
on a : $f'(x) = \frac{1}{x+3}$ et $f''(x) = -\frac{1}{(x+3)^2}$.

Donc, f' est décroissante sur K .

On a : $f'(1) = \frac{1}{4}$ et $f'(2) = \frac{1}{5}$.

Donc : $\forall x \in K, \frac{1}{5} \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$;

on en déduit que : $\forall x \in K, |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.



3°) a) On a : $u_0 \in K$ et $f(K) \subset K$; donc si $u_k \in K$, alors $u_{k+1} \in K$.

On en déduit par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in K$.

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à f sur K , on a : $|u_1 - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_0 - \alpha|$

et, plus généralement, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$.

On en déduit, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n} |u_0 - \alpha|$.

Or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4^n} = 0$; donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

b) On a : $|u_0 - \alpha| \leq 1$.

Pour que $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$, il suffit que $\frac{1}{4^n} \leq 10^{-3}$; c'est-à-dire : $n \geq 5$.

Une calculatrice donne : $u_5 \approx 1,505$.

Remarque

Cette méthode est utilisable lorsque l'équation peut se mettre sous la forme $f(x) = x$ et si la solution cherchée appartient à un intervalle fermé K tel que : $\forall x \in K, |f'(x)| \leq k$ ($k \in [0; 1]$).

2. Méthode de Newton

On considère l'équation (E) : $\frac{1}{3}x^3 - x - 1 = 0$.

1°) Étudier la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - x - 1$ et tracer sa courbe représentative $(\mathcal{C})$.

En déduire que (E) admet une unique solution, notée α , appartenant à l'intervalle $[2; 3]$.

2°) On considère la fonction g qui à tout élément x de $[2; 3]$, associe l'abscisse du point d'intersection avec (OI) de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse x .

a) Démontrer que : $\forall x \in [2; 3], g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

En déduire que les équations $f(x) = 0$ et $g(x) = x$ sont équivalentes sur $[2; 3]$.

b) On désigne par K l'intervalle $[\alpha; 3]$.

Calculer $g'(x)$ et démontrer que : $\forall x \in K, \alpha \leq g(x) \leq x$.

3°) Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n)$.

a) Démontrer que cette suite converge vers α .

b) Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, une valeur approchée de $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ et u_7 .

En déduire une valeur approchée de α , en conjecturant son incertitude.

Solution

1°) La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $f'(x) = x^2 - 1$.

On obtient le tableau de variation ci-contre et la courbe $(\mathcal{C})$ ci-dessous.

On en déduit que l'équation (E) admet une solution unique α telle que : $\alpha \in]1; +\infty[$.

De plus, on a : $f(2) = -\frac{1}{3}$ et $f(5) = 5$.

Donc : $\alpha \in [2; 3]$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$+\infty$	

2°) a) Soit $x_0 \in [2; 3]$; on a : $f'(x_0) \neq 0$.

Une équation de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse x_0 est : $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Cette droite coupe (OI) au point d'abscisse $x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

Donc : $\forall x \in [2; 3], g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

On en déduit que :

$$\forall x \in [2; 3], g(x) = x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{f'(x)} = 0 \\ \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

b) On a : $\forall x \in K, g'(x) = \frac{f''(x) \times f(x)}{[f'(x)]^2}$;

de plus : $f'(x) = x^2 - 1$ et $f''(x) = 2x$.

Donc f, f' et f'' sont strictement positives sur K .

On en déduit que g est croissante sur K .

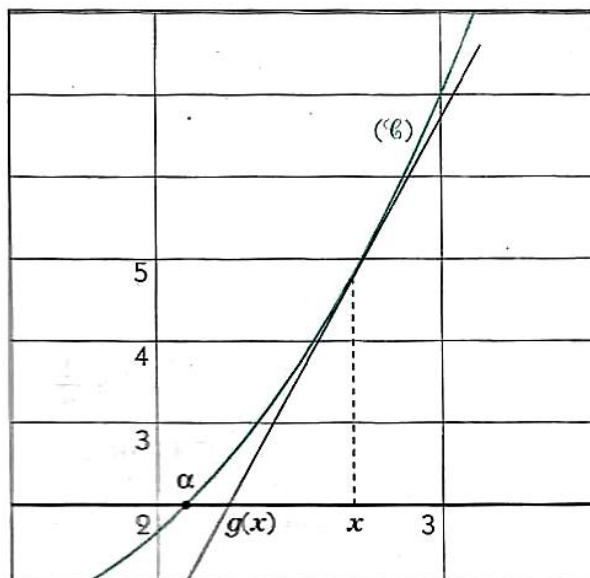
On a : $g(\alpha) = \alpha$,

$$\forall x \in K, \alpha \leq x \Rightarrow g(\alpha) \leq g(x) ;$$

donc : $\forall x \in K, \alpha \leq g(x)$.

De plus : $\forall x \in K, g(x) - x = -\frac{f(x)}{f'(x)}$; donc : $\forall x \in K, g(x) - x \leq 0$.

On en déduit que : $\forall x \in K, \alpha \leq g(x) \leq x$.



3°) a) D'après ce qui précède, la suite (u_n) est décroissante et minorée ; donc, elle est convergente.

De plus, α est l'unique point fixe de la fonction g . Donc, la suite converge vers α .

b) On obtient le tableau ci-contre.

On remarque qu'à partir de u_5 , les termes de la suite ont leurs neuf premières décimales identiques.

On conjecture que u_5 est une valeur approchée à 10^{-9} près de α .

n	u_n
1	2,375
2	2,140 011 223 ...
3	2,104 582 738 ...
4	2,103 803 775 ...
5	2,103 803 403 ...
6	2,103 803 403 ...
7	2,103 803 403 ...

Remarques

• La méthode de Newton est également appelée « méthode des tangentes ».

• La puissance de cette méthode vient du choix de la fonction g . En effet, cette fonction est telle que $g'(\alpha) = 0$; donc, le majorant de g' sur l'intervalle K est proche de 0 et une bonne approximation de α est rapidement obtenue.

Exercices

3.a Soit a un nombre réel et (u_n) la suite définie par : $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Conjecturer graphiquement la limite de cette suite, suivant les valeurs de a .

2. On suppose que : $a = \frac{1}{2}$.

a) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0.

b) En déduire que cette suite est convergente et déterminer sa limite.

3.b Soit a un nombre réel tel que $0 \leq a \leq 1$ et (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}.$$

1. Conjecturer graphiquement la limite de cette suite.

2. On pose : $u_0 = \cos \alpha$ ($\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$).

a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \cos(\frac{\alpha}{2^n})$.

b) En déduire la limite de la suite (u_n) .

3.c

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(e^{u_n} + 1).$$

1. Conjecturer graphiquement la limite de cette suite.

2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général : $v_n = e^{u_n}$.

a) Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison 1.

b) En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercices

APPRENTISSAGE

Étude globale d'une suite

1 Dans chacun des cas suivants, démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée.

$$\begin{array}{ll} a) u_n = \sqrt{n^2 + 1} - n & b) u_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \\ c) u_n = \frac{(-1)^n n + \cos n}{n+1} & d) u_n = \frac{n}{e^n} \end{array}$$

2 Dans chacun des cas suivants, démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée.

$$\begin{array}{ll} a) u_n = \frac{3n + \sin n}{n^2} & b) u_n = \frac{\ln n}{n} \\ c) u_n = \ln(n^2 + 1) - 2 \ln n & d) u_n = \frac{2^n + 1}{4^n - 1} \end{array}$$

3 Dans chacun des cas suivants, représenter graphiquement la suite (u_n) , conjecturer si cette suite est majorée, minorée, bornée et démontrer la conjecture.

$$\begin{array}{l} a) \begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases} \\ b) \begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -2u_n + 1 \end{cases} \end{array}$$

4 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de terme général :

$$u_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2}.$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 2, on a : $\frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$.

2. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.
En déduire que la suite (u_n) est bornée.

5 Soit (u_n) la suite définie, pour $n \geq 2$, par :

$$u_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^n}.$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 2, on a : $\frac{1}{p^p} \leq \frac{1}{2^p}$.

2. Calculer, en fonction de n , la somme : $\sum_{p=2}^n \frac{1}{2^p}$.
En déduire que la suite (u_n) est bornée.

6 Dans chacun des cas suivants, déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

$$\begin{array}{ll} a) u_n = \sqrt[n]{n} \quad (n \in \mathbb{N}^*) & b) u_n = \frac{n!}{n^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*) \\ c) u_n = n^2 - 2^n \quad (n \in \mathbb{N}) & d) u_n = \frac{4^n}{3^n + 1} \quad (n \in \mathbb{N}). \end{array}$$

7 Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - 3.$$

Démontrer par récurrence que :

- a) si $a = 3$, alors (u_n) est constante ;
- b) si $a > 3$, alors (u_n) est croissante ;
- c) si $a < 3$, alors (u_n) est décroissante.

8 Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 5 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + n^2 - 4n.$$

Démontrer que (u_n) est croissante à partir du rang 4.

9 Dans chacun des cas suivants, conjecturer à l'aide d'une représentation graphique le sens de variation de la suite (u_n) .

$$\begin{array}{l} a) u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \ln u_n ; \\ b) u_0 = -3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{u_n - 1} ; \\ c) u_0 = 3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n}. \end{array}$$

10 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n - (-1)^n}.$$

1. a) Calculer u_1, u_2 et u_3 .

b) Calculer u_{2p}, u_{2p+1} et u_{2p+2} .

En déduire que la suite (u_n) n'est ni croissante ni décroissante.

2. Démontrer que les suites $(u_{2p})_{p \in \mathbb{N}^*}$ et $(u_{2p-1})_{p \in \mathbb{N}^*}$ sont décroissantes.

11 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites définies par :

$$u_n = \frac{2^n - 4n + 3}{2} \text{ et } v_n = \frac{2^n + 4n - 3}{2}.$$

1. Calculer $u_n + v_n$ et $u_n - v_n$ en fonction de n .

2. En déduire l'expression de chacune des sommes $\sum_{p=0}^n u_p$ et $\sum_{p=0}^n v_p$ en fonction de n .

12 Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_1 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 2u_n - \frac{1}{3}.$$

1. Déterminer le nombre réel a pour que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, de terme général $v_n = u_n - a$, soit une suite géométrique.

2. Exprimer v_n en fonction de n et calculer $\sum_{p=1}^n v_p$.

3. Exprimer u_n en fonction de n et calculer $\sum_{p=1}^n u_p$.

Limites de suites

13 Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

$$\begin{array}{ll} a) u_n = n \tan \frac{1}{n} & b) u_n = 2^n \sin \frac{\pi}{2^n} \\ c) u_n = n^2 \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) & d) u_n = n \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right). \end{array}$$

14 Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

$$\begin{array}{ll} a) u_n = \frac{4n-1}{3n+2} & b) u_n = n - \sqrt{n+1} \end{array}$$

$$c) u_n = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \left(1 - \frac{1}{9}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

15 Dans chacun des cas suivants, conjecturer à l'aide d'un graphique, puis d'une calculatrice, l'existence de la limite de la suite (u_n) .

$$a) \forall n \in \mathbb{N}, u_n = n \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right);$$

- b) $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n}$
 c) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$
 d) $u_0 \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2u_n - 1}$.

16 Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- a) $u_n = \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}}$ b) $u_n = \frac{\sqrt{4n^2+1}-n}{\sqrt{4n^2+1}+n}$
 c) $u_n = \frac{1-n}{1+\ln n}$ d) $u_n = e^{\ln n - n}$.

17 Déterminer la limite des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par : $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$ et $v_n = nu_n$.

18 Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- a) $u_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$ b) $u_n = 4^n - 2^n$
 c) $u_n = -\left(\frac{5}{4}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n$ d) $u_n = \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$
 e) $u_n = \frac{5^n - 2^n}{5^n - 3^n}$ f) $u_n = \frac{2^n}{n^2 + 2^n}$
 g) $u_n = 2^n - n^3$ h) $u_n = \frac{2^n n^5}{3^n}$.

19 Dans chacun des cas suivants, utiliser les propriétés de comparaison pour déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- a) $u_n = \frac{n - \sin n}{n + \cos n}$ b) $u_n = \frac{n \cos(1 + \frac{1}{n})}{n^2 + 1}$
 c) $u_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} - (-1)^n}$ d) $u_n = \frac{\cos n + (-1)^n \ln n}{n}$.

20 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de terme général :

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}.$$

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$.
 2. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

21 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de terme général :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \sqrt{\frac{n}{2}}$.
 2. En déduire que la suite (u_n) est divergente.

22 Dans chacun des cas suivants, étudier la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- a) $u_n = \sin\left(\frac{2^n \pi}{2 + 2^{n+1}}\right)$ b) $u_n = 10^{n - \sqrt{n^2+1}}$
 c) $u_n = 2^{\sqrt{n} - n}$ d) $u_n = (1 + n)^{\frac{1}{n}}$
 e) $u_n = (1 + n^2)^{-n}$ f) $u_n = (1 + \sqrt{n})^{\frac{1}{n}}$.

23 Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 4.$$

1. Représenter graphiquement cette suite et conjecturer sa limite.

2. a) Calculer l'abscisse a du point d'intersection des droites d'équations $y = x$ et $y = \frac{1}{2}x + 4$.

b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - a = \frac{1}{2^n}(u_0 - a)$.

En déduire le résultat conjecturé à la question 1.

3. Utiliser une méthode analogue pour déterminer la limite éventuelle de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

a) $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 4$.

b) $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -2u_n + 4$.

c) $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 4$.

Suites monotones convergentes

24 Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{u_n + 3}.$$

1. Donner une représentation graphique sur (OI) des 3 premiers termes de la suite (u_n) et conjecturer la limite de cette suite.

2. a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 2$.

b) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

3. En déduire que cette suite est convergente et déterminer sa limite.

25 Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}.$$

1. Déterminer a pour que la suite (u_n) soit constante.

2. Démontrer que si $a > 1$, la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

26 Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = -1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}.$$

1. Tracer la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \sqrt{2x+3}$. En déduire une représentation graphique sur (OI) des 4 premiers termes de la suite (u_n) et conjecturer la limite de cette suite.

2. a) Démontrer par récurrence que :

• $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq u_n \leq 3$;

• la suite (u_n) est croissante.

b) En déduire que cette suite est convergente et déterminer sa limite.

27 Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 4 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n).$$

1. Tracer la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$. En déduire une représentation graphique des 4 premiers termes de la suite (u_n) .

2. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée.

3. En déduire que cette suite est convergente et démontrer qu'elle converge vers 0.

APPROFONDISSEMENT

28 Trois frères se partagent un terrain rectangulaire de 14 hectares de superficie, de la façon suivante :

- le 1^{er} en prend la moitié ;
- le 2^e prend la moitié de ce qui reste ;
- le 3^e prend la moitié de ce qui reste, et le partage continue ainsi.

Le terrain sera-t-il totalement partagé si on continue indéfiniment cette méthode ?

Si oui, quelle sera la part de chaque frère ?

29 Utilisation d'une suite auxiliaire

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - n^2 + n.$$

1. Déterminer un polynôme du second degré P tel que la suite de terme général $a_n = P(n)$ vérifie la relation de récurrence précédente.
2. Démontrer que la suite de terme général $v_n = u_n - a_n$ est une suite géométrique.
3. Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n .
4. Étudier la convergence des suites (v_n) et (u_n) .

30 Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n^n}.$$

1. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
2. On désigne par (v_n) la suite définie par :
 $v_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, v_n = v_{n-1} + \frac{1}{2^n}.$

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, 0 \leq u_n \leq v_n$.

En déduire que la suite (u_n) est majorée.

3. Démontrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

31 1. Démontrer que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x.$$

2. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général : $u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \dots \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \dots \left(1 + \frac{n-1}{n^2}\right).$

32 Suites extraites et convergence

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n}.$$

1. Donner une représentation graphique sur (OI) des 3 premiers termes de la suite (u_n) et conjecturer la limite éventuelle de cette suite.

2. a) Démontrer que la suite $(u_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $1 + \sqrt{2}$.

- b) Démontrer que la suite $(u_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $1 + \sqrt{2}$.

3. Démontrer que les suites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) sont convergentes et ont la même limite.

Nous admettons que cette limite commune est la limite de la suite (u_n) .

33 Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \cos u_n.$$

On désigne par f la fonction cosinus.

1. a) Donner une représentation graphique des 4 premiers termes de la suite (u_n) .

Que peut-on conjecturer ?

- b) Démontrer que l'équation $\cos x = x$ admet une solution unique dans l'intervalle $K = \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

On désigne par α cette solution.

- c) Démontrer que $f(K) \subset K$ et que pour tout élément x de K , on a : $f'(x) \leq 0,9$.

2. a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in K \text{ et } |u_{n+1} - \alpha| \leq 0,9 |u_n - \alpha|.$$

- b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} (0,9)^{n-1}.$

- c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, une valeur approchée à 10^{-3} près de sa limite.

34 Approximation de $\sqrt{2}$ par les suites

A - Soit (p_n) et (q_n) les suites définies par :

$$\begin{cases} p_0 = q_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1} = p_n + 2q_n \\ \forall n \in \mathbb{N}, q_{n+1} = p_n + q_n \end{cases}$$

1. Compléter le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_n									
q_n									

2. a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, p_n^2 - 2q_n^2 = (-1)^{n+1}.$

- b) Conjecturer les limites des suites (p_n) et (q_n) ; en déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_n}{q_n} = \sqrt{2}.$

3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général : $u_n = \frac{p_n}{q_n}.$

- a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et donner une définition par récurrence de la suite (u_n) .

- b) Représenter graphiquement les premiers termes de la suite (u_n) , puis démontrer que cette suite converge vers $\sqrt{2}.$

B - Soit (a_n) et (b_n) les suites définies par :

$$\begin{cases} a_0 = b_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = a_n^2 + 2b_n^2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = 2a_n b_n \end{cases}$$

et la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général : $v_n = \frac{a_n}{b_n}.$

Donner une définition par récurrence de la suite (v_n) , puis démontrer que cette suite converge également vers $\sqrt{2}.$

35 Série harmonique alternée

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de terme général :

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$$

On se propose d'étudier la convergence de cette suite appelée série harmonique alternée.

On désigne par $(v_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ et $(w_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ les suites de termes généraux : $v_p = u_{2p}$ et $w_p = u_{2p+1}.$

1. Démontrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, v_p < w_p.$

2. a) Démontrer que les suites (v_p) et (w_p) sont respectivement croissante et décroissante.

- b) En déduire que (v_p) et (w_p) sont convergentes.

3. a) Démontrer que la suite de terme général $w_p - v_p$ converge vers 0.

- b) En déduire que la suite (u_n) a une limite dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

On démontre que cette limite est $\ln 2$.

36 Suites de Fibonacci

Léonard de Pise (1170 env. - 1250 env.), plus connu sous le nom de Fibonacci, pose dans le Liber abaci le célèbre problème suivant :

« Combien de couples de lapins obtiendrons-nous à la fin d'une année si, commençant avec un couple, chacun des couples produit chaque mois un nouveau couple, lequel devient productif au second mois de son existence ? ».

1. Soit F_n le nombre de couples de lapins au n -ième mois.

a) Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_n	1												

b) Exprimer F_{n+2} en fonction de F_{n+1} et F_n .

La suite F_n est appelée suite de Fibonacci.

2. On désigne respectivement par α et β les solutions positive et négative de l'équation : $x^2 - x - 1 = 0$.

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_1 = 1, u_2 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$.

b) En déduire la limite de la suite (u_n) .

37 On considère un damier de format $2 \times n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

On désigne par d_n le nombre de façons différentes dont on peut le recouvrir avec des dominos de format 2×1 .

1. Calculer d_1, d_2, d_3 .

2. Démontrer que (d_n) est une suite de Fibonacci et calculer (d_{20}) .

38 De combien de façons peut-on vider un tonneau de 20 litres avec deux récipients de capacités respectives 1 litre et 2 litres ?

39 Soit f une fonction continue sur $]a; b[$ et telle que : $f([a; b]) \subset]a; b[$.

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son premier terme et la formule de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer que si f est une fonction croissante, alors la suite (u_n) est monotone et convergente.

2. Démontrer que si f est une fonction décroissante, alors les suites extraites $(u_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ sont des suites monotones et convergentes.

3. Utiliser les résultats précédents pour étudier la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

a) $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 1}$;

b) $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2}{u_n^2 + 1}$;

c) $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (1 - u_n)^2$.

40 1. Soit f une fonction continue de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$.

a) Démontrer qu'il existe au moins un nombre réel α tel que : $f(\alpha) = \alpha$.

b) On suppose que f est dérivable sur $[0; 1]$ et qu'il existe un nombre réel k élément de $[0; 1[$ tel que :

$$\forall x \in [0; 1], |f'(x)| \leq k.$$

Démontrer que α est unique.

2. Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 \in [0; 1] \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n),$$

où f est une fonction vérifiant les conditions précédentes.

a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq k |u_n - \alpha|$.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. Application

Étudier la limite de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}.$$

41 Soit f la fonction de $[0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = |x \ln x|, \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

1. a) Étudier f et tracer sa courbe représentative ($\mathcal{C}$).

b) Démontrer qu'il existe un nombre réel α unique, élément de $]1; e[$, tel que : $f(\alpha) = \frac{1}{e}$.

Placer le point correspondant sur $\mathcal{C}$.

Donner, à l'aide d'une calculatrice, une valeur approchée à 10^{-2} près de α .

2. Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

a) Déterminer u_0 pour que cette suite soit constante.

b) On choisit $u_0 \in]0; \frac{1}{e}[$. Démontrer que :

$$\bullet \forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < \frac{1}{e};$$

• la suite (u_n) est strictement croissante ;

• la suite (u_n) converge vers $\frac{1}{e}$.

c) Étudier la convergence de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

$$\bullet u_0 \in]\frac{1}{e}; 1[;$$

$$\bullet u_0 \in]1; \alpha[;$$

$$\bullet u_0 = \alpha.$$

d) On choisit : $u_0 > e$. Démontrer que :

• la suite (u_n) est strictement croissante ;

$$\bullet \forall x \in]e; +\infty[, f'(x) \geq 2;$$

$$\bullet \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 2(u_n - u_{n-1});$$

$$\bullet \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 2^n(u_1 - u_0).$$

En déduire la limite de la suite (u_n) .

BAC AMÉRIQUE DU NORD 1987

42 Suites adjacentes

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies dans $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} 0 < u_0 < v_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}. \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que les suites (u_n) et (v_n) sont strictement positives.

2. a) Calculer $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2$ et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n.$$

b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante.

c) Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0).$$

En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

On dit que (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes.

3. Déterminer un encadrement à 10^{-5} près de la limite commune des suites (u_n) et (v_n) , lorsque $u_0 = 1$ et $v_0 = 7$.

Cette limite est appelée moyenne arithmético-géométrique des nombres u_0 et v_0 .

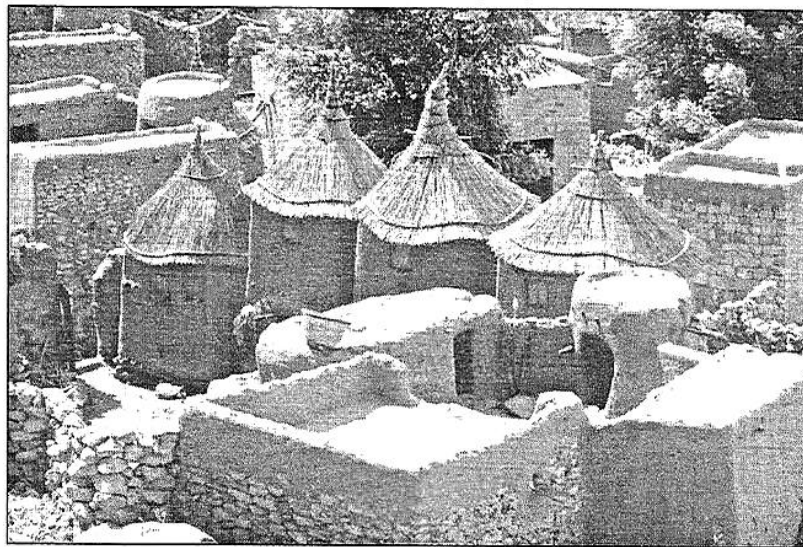


Introduction

Les mathématiciens Grecs calculaient les aires par des méthodes géométriques consistant à remplacer la région considérée par un carré de même aire (problème de la quadrature).

Au XVII^e siècle, KÉPLER (1571-1630) obtient des formules pour calculer le volume de tonneaux à l'aide de décompositions de régions en domaines élémentaires. Enfin, LEIBNITZ (1646-1716) et NEWTON (1643-1727) construisent, de façon indépendante et presque simultanée, une méthode pour la détermination des aires et des volumes par le « calcul intégral ».

L'objet de ce chapitre est de définir l'intégrale d'une fonction continue et de mettre en place des techniques permettant les calculs d'aires et de volumes, ainsi que des longueurs d'arcs, de moments d'inertie et autres applications à la Physique.



© M. Renaudeau / Hooqui.

SOMMAIRE

1.	Intégrale d'une fonction continue	296
2.	Techniques de calcul intégral	302
3.	Applications du calcul intégral	309

1 Intégrale d'une fonction continue

1.1. Notion d'intégrale

Introduction

On considère la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ de $]0 ; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

Soit $\mathcal{A}$ la fonction de $]1 ; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ qui à t associe l'aire du domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe (OI) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = t$.

On a : $\mathcal{A}(1) = 0$.

Étudions la dérivabilité de la fonction $\mathcal{A}$.

Soit t_0 un élément de $]1 ; +\infty[$.

• Justifier que :

$$\forall t \in]t_0 ; +\infty[, \frac{1}{t} (t - t_0) \leq \mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(t_0) \leq \frac{1}{t_0} (t - t_0).$$

• En déduire que la fonction $\mathcal{A}$ est dérivable à droite en t_0 et que son nombre dérivé à droite est $\frac{1}{t_0}$.

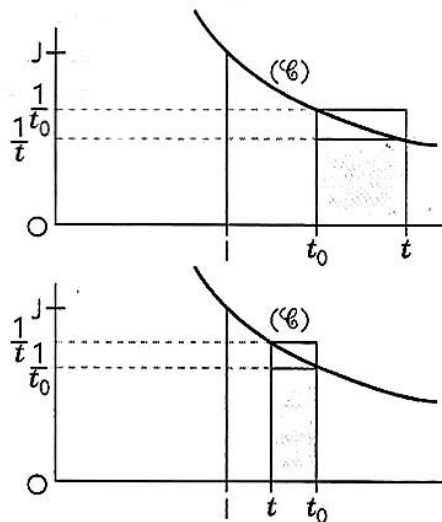
Soit t_0 un élément de $]1 ; +\infty[$.

• Justifier que :

$$\forall t \in [1 ; t_0[, \frac{1}{t_0} (t_0 - t) \leq \mathcal{A}(t_0) - \mathcal{A}(t) \leq \frac{1}{t} (t_0 - t).$$

• En déduire que la fonction $\mathcal{A}$ est dérivable à gauche en t_0 et que son nombre dérivé à gauche est $\frac{1}{t_0}$.

• Démontrer que la fonction $\mathcal{A}$ est la primitive sur $]1 ; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, qui s'annule en 1, et que : $\forall t \in [1 ; +\infty[, \mathcal{A}(t) = \ln t$.



Définition et conséquences

Soit f une fonction continue sur un intervalle K , F et G deux primitives de f sur K , a et b deux éléments de K . On sait qu'il existe un nombre réel c tel que : $\forall t \in K, G(t) = F(t) + c$.

On a : $G(b) - G(a) = F(b) + c - F(a) - c = F(b) - F(a)$.

Le nombre réel $F(b) - F(a)$ est donc indépendant de la primitive de f choisie.

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle K , a et b deux éléments de K .

On appelle intégrale de a à b de f le nombre réel $F(b) - F(a)$, où F est une primitive de f sur K .

On note : $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b$.

Vocabulaire

• $\int_a^b f(t) dt$ se lit « somme (ou intégrale) de a à b de $f(t) dt$ ».

• $[F(t)]_a^b$ se lit « $F(t)$ pris entre a et b ».

• a et b sont les bornes de l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$.

• Dans l'écriture $\int_a^b f(t) dt$, on peut remplacer t par toute autre lettre (sauf a et b) et écrire $\int_a^b f(x) dx$ ou $\int_a^b f(s) ds$; t est appelée variable muette.

Exemples

- $\int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$
- Soit c un nombre réel. On a : $\int_a^b c dt = [ct]_a^b = c(b-a).$
- $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Les propriétés suivantes sont des conséquences immédiates de la définition.

Propriétés 1

Soit f une fonction continue sur un intervalle K , a et b deux éléments de K . On a :

- $\int_a^a f(t) dt = 0$;
- $\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt.$

Propriété 2

Soit f une fonction continue sur un intervalle K et a un élément de K .

La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$, de K vers $\mathbb{R}$, est la primitive de f sur K qui s'annule en a .

Exemple

La fonction logarithme népérien est la fonction $x \mapsto \int_1^x \frac{dt}{t}$ ($x > 0$).

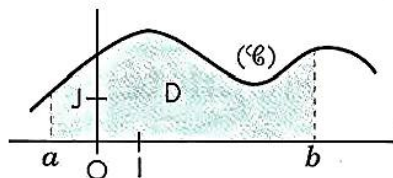
Interprétation graphique de l'intégrale

La propriété suivante, que nous admettons, généralise le résultat établi en introduction.

Propriété

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle K , $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative, a et b deux éléments de K ($a < b$).

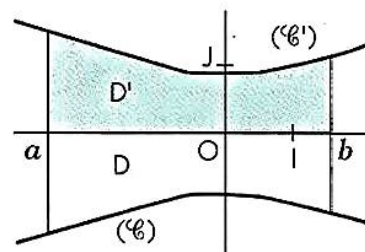
$\int_a^b f(t) dt$ est l'aire (en unités d'aire) du domaine D délimité par $(\mathcal{C})$, (OI) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



Remarques

- L'aire de D (en unités d'aire) peut être notée $\mathcal{A}(D)$.
- Le domaine précédent est aussi l'ensemble des points $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ tels que : $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$.
- Si la fonction f est continue et négative sur $[a; b]$, la symétrie orthogonale d'axe (OI) transforme la courbe $(\mathcal{C})$ en la courbe $(\mathcal{C}')$ représentative de $(-f)$. Le domaine D est transformé en un domaine D' de même aire.

On a : $\mathcal{A}(D) = \mathcal{A}(D') = \int_a^b (-f)(t) dt.$



Exemples

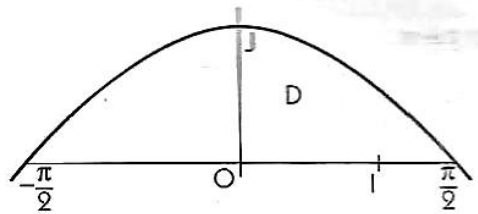
- L'unité graphique est 2 cm sur chaque axe.

Calculer l'aire, en cm^2 , de l'ensemble D des points $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ tels que : $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ et $0 \leq y \leq \cos x$.

La fonction cosinus est continue et positive sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

On a : $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = [\sin t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2$.

L'unité d'aire est égale à 4 cm^2 ; donc l'aire de D est égale à 8 cm^2 .

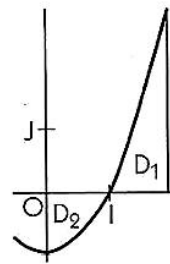


• La courbe ci-contre est la représentation graphique de la fonction $x \mapsto x^2 - 1$. Calculer l'aire du domaine colorié.

On a : $\mathcal{A}(D_1) = \int_1^2 (t^2 - 1) \, dt = \left[\frac{t^3}{3} - t \right]_1^2 = \frac{4}{3}$;

$\mathcal{A}(D_2) = \int_0^1 -(t^2 - 1) \, dt = \left[-\frac{t^3}{3} + t \right]_0^1 = \frac{2}{3}$.

On en déduit que l'aire du domaine colorié est égale à 2 unités d'aire.



Interprétation cinématique de l'intégrale

Un mobile se déplace sur un axe à la vitesse $v(t)$, t étant la variable temps.

Si l'on suppose que v est positive entre les instants t_1 et t_2 , alors la distance parcourue par le mobile entre ces deux instants est : $\int_{t_1}^{t_2} v(t) \, dt$.

Exemple

Un corps est lâché, avec une vitesse initiale nulle à l'instant $t_0 = 0$, d'une hauteur de 1 000 m et est soumis à l'accélération de la pesanteur $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.

• Quelle distance d a-t-il parcouru après 5 secondes de chute ?

On a : $v(t) = g t$; donc la distance (en mètres) parcourue après 5 secondes de chute est :

$d = \int_0^5 g t \, dt = \left[\frac{1}{2} g t^2 \right]_0^5 = 122,5$.

• À quel instant T (en secondes) touche-t-il le sol ?

On a : $\int_0^T g t \, dt = 1\,000 \Leftrightarrow \frac{1}{2} g T^2 = 1\,000$. Donc : $T \approx 14,3$.

1.2. Propriétés algébriques

Relation de Chasles

Propriété 1

Soit f une fonction continue sur un intervalle K , a , b et c trois éléments de K .

On a : $\int_a^b f(t) \, dt + \int_b^c f(t) \, dt = \int_a^c f(t) \, dt$.

Démonstration

Soit F une primitive de f sur K .

On a : $\int_a^b f(t) \, dt + \int_b^c f(t) \, dt = [F(b) - F(a)] + [F(c) - F(b)] = F(c) - F(a)$;

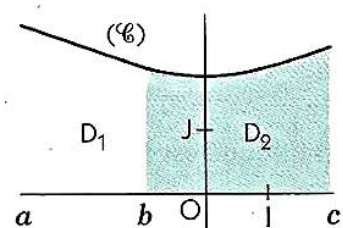
donc : $\int_a^b f(t) \, dt + \int_b^c f(t) \, dt = \int_a^c f(t) \, dt$.

Interprétation graphique

Supposons que f soit positive sur $[a ; c]$ et $a \leq b \leq c$.

Désignons par D le domaine délimité par $(\mathcal{C})$, (OI) et les droites d'équations $x = a$ et $x = c$.

La relation de Chasles signifie que : $\mathcal{A}(D) = \mathcal{A}(D_1) + \mathcal{A}(D_2)$.



Exemple

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 -\sin t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = [\cos t]_{-\frac{\pi}{2}}^0 + [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

linéarité de l'intégrale

Les propriétés suivantes sont déduites des propriétés des primitives.

Propriétés

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle K , α un nombre réel, a et b deux éléments de K .

On a :

- $\int_a^b \alpha f(t) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt ;$
- $\int_a^b (f + g)(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt.$

Remarque

En particulier on a : $\int_a^b [-f(t)] dt = - \int_a^b f(t) dt.$

Exemple

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t dt = \frac{1}{2} [t]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi + 2}{8}.$$

1.3. Propriétés de comparaison

Signe de l'intégrale

Propriété 1

Soit f une fonction continue sur un intervalle K , a et b deux éléments de K ($a \leq b$).

Si f est positive sur $[a ; b]$, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.

Démonstration

Soit F une primitive de f sur K .

Si f est positive sur $[a ; b]$, alors F est croissante sur $[a ; b]$ et on a : $F(b) - F(a) \geq 0$;

donc : $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.

Propriété 2

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle K , a et b deux éléments de K ($a \leq b$).

Si $f \leq g$ sur $[a ; b]$, alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.

Démonstration

Si $f \leq g$ sur $[a ; b]$, alors la fonction $(g - f)$ est positive sur $[a ; b]$ et on a : $\int_a^b (g - f)(t) dt \geq 0$;
d'où l'on déduit le résultat.

Exemple

Démontrer que : $\forall x \in [1 ; +\infty[$, $\ln x \leq x - 1$.

Soit x un élément de $[1 ; +\infty[$.

On a : $\forall t \in [1 ; x]$, $\frac{1}{t} \leq 1$; donc : $\int_1^x \frac{dt}{t} \leq \int_1^x dt$.

On en déduit que : $\forall x \in [1 ; +\infty[$, $\ln x \leq x - 1$.

Remarque

Soit f une fonction continue sur un intervalle K , a et b deux éléments de K ($a \leq b$).

On a : $-|f| \leq f \leq |f|$ sur $[a; b]$; on en déduit que : $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$.

Inégalité de la moyenne

Propriété 1

Soit f une fonction continue sur un intervalle K , a et b deux éléments de K ($a \leq b$).

Si m et M sont deux nombres réels tels que pour tout t élément de $[a; b]$, $m \leq f(t) \leq M$,

alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a)$.

Cette propriété est appelée inégalité de la moyenne.

Démonstration

On a : $\forall t \in [a; b]$, $m \leq f(t) \leq M$; donc : $\int_a^b m dt \leq \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b M dt$.

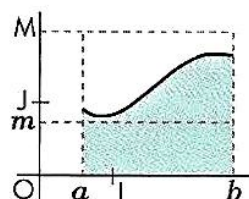
On en déduit que : $m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a)$.

Remarques

- L'inégalité de la moyenne appliquée à f sur l'intervalle $[a; b]$ n'est autre que l'inégalité des accroissements finis appliquée à une primitive F de f sur le même intervalle.
- f étant continue sur $[a; b]$, f est bornée sur $[a; b]$. Les nombres réels m et M existent donc toujours.

Interprétation graphique

Lorsque m est positif, cette propriété signifie que l'aire du domaine colorié ci-contre est comprise entre les aires des rectangles de même base $b-a$ et de hauteurs respectives m et M .



Exemple

Démontrer que : $\frac{1}{8} \leq \int_2^4 \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{2}$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est décroissante sur $[2; 4]$; on a donc : $\forall t \in [2; 4]$, $\frac{1}{16} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{4}$.

On en déduit que : $\frac{4-2}{16} \leq \int_2^4 \frac{dt}{t^2} \leq \frac{4-2}{4}$; c'est-à-dire : $\frac{1}{8} \leq \int_2^4 \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{2}$.

Propriété 2

Soit f une fonction continue sur un intervalle K , a et b deux éléments de K .

Si M est un nombre réel tel que pour tout t élément de K , $|f(t)| \leq M$, alors $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq M|b-a|$.

Cette propriété est une autre formulation de l'inégalité de la moyenne ; elle se déduit de la précédente en remplaçant m par $-M$.

Valeur moyenne d'une fonction

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ ($a \neq b$).

On appelle valeur moyenne de f sur $[a; b]$ le nombre réel μ tel que : $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$.

Remarque

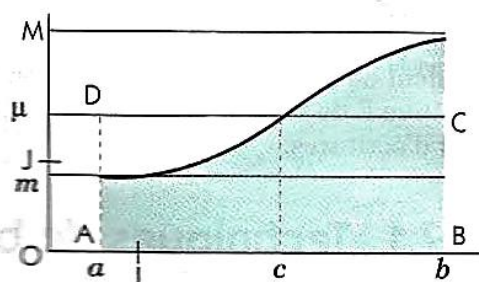
Soit f une fonction continue sur $[a ; b]$ et μ sa valeur moyenne sur $[a ; b]$.
L'image par f de $[a ; b]$ est un intervalle $[m ; M]$.

On a : $m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a)$; donc : $m \leq \mu \leq M$.

Le nombre μ admet donc au moins un antécédent c par f sur $[a ; b]$.

Interprétation graphique

Lorsque f est positive, μ est la hauteur du rectangle ABCD, de base $b-a$, dont l'aire est égale à celle de la surface coloriée.



Exemple

Calculer la valeur moyenne de la fonction $x \mapsto 1 - x^2$ sur l'intervalle $[-1 ; 1]$.

On a : $\mu = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 - t^2) dt = \frac{1}{2} \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}$.

Interprétation cinématique

Si un mobile se déplace sur un axe à la vitesse $v(t)$, sa vitesse moyenne entre deux instants t_1 et t_2 est

$v_m = \frac{d}{t_2 - t_1}$, d étant la distance parcourue entre ces deux instants.

Lorsque v est positive entre t_1 et t_2 , on a : $d = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$; donc : $v_m = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$.

La vitesse moyenne est donc la valeur moyenne de la vitesse.

Exercices

1.a Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-1}^2 2t dt$

b) $\int_2^0 t^2 dt$

c) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$

d) $\int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

e) $\int_0^\pi \sin t dt$

f) $\int_{-1}^2 e^t dt$

g) $\int_2^0 \frac{dt}{\sqrt{t+2}}$

h) $\int_2^3 \sqrt{2x+1} dx$.

1.b L'unité graphique est égale à 2 cm sur (OI) et à 1 cm sur (OJ).

Dans chacun des cas suivants, représenter graphiquement la fonction f sur $[a ; b]$ puis calculer l'aire, en cm^2 , du domaine délimité par la courbe ainsi obtenue, la droite (OI) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

a) $f(x) = x^2 + 1$, $a = -1$ et $b = 3$

b) $f(x) = \frac{-6}{(x+1)^2}$, $a = 1$ et $b = 2$

c) $f(x) = -\frac{1}{x}$, $a = 1$ et $b = e$

d) $f(x) = e^x + 1$, $a = -3$ et $b = 1$.

1.c Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-2}^3 |x-1| dx$

b) $\int_{-4}^5 |x^2 - 9| dx$

c) $\int_0^\pi |\cos 2x| dx$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x| dx$.

1.d Soit $A = \int_0^\pi \cos^2 x dx$ et $B = \int_0^\pi \sin^2 x dx$.

1. Utiliser les propriétés de linéarité de l'intégrale pour calculer $A + B$ et $A - B$.

2. En déduire les valeurs de A et B .

1.e 1. Démontrer que : $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}\right], 1 \leq \frac{1}{\sin x} \leq \sqrt{2}$.

2. En déduire que : $\frac{\pi}{4} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

1.f Dans chacun des cas suivants, calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle K .

a) $f(x) = x^2 + 1$, $K = [0 ; 10]$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, $K = [8 ; 15]$

c) $f(x) = \frac{1}{x+2}$, $K = [e-2 ; e^2-2]$

d) $f(x) = \cos 2x$, $K = [0 ; \pi]$.

2 Techniques de calcul intégral

Le calcul de l'intégrale d'une fonction continue f entre a et b se réduit généralement à la recherche d'une primitive F de f sur $[a ; b]$ et au calcul de $F(b) - F(a)$. Dans certains cas, ce calcul utilise des transformations d'écritures.

2.1. Techniques de base

Utilisation des primitives usuelles

Le tableau suivant reprend quelques résultats concernant les primitives, vus dans les chapitres précédents. Dans ce tableau, u désigne une fonction dérivable sur un intervalle K , v une fonction dérivable sur un intervalle contenant $u(K)$ et α un nombre réel différent de -1 .

Fonction	$\frac{u'}{u}$	$u' e^u$	$u' u^\alpha$	$u' \times v' \circ u$
Primitive	$\ln u $	e^u	$\frac{1}{\alpha + 1} u^{\alpha+1}$	$v \circ u$
Commentaires	$u \neq 0$ sur K		$u > 0$ sur K	

Exemples

$$\begin{aligned} \bullet \int_0^1 (t^3 + 2t + 1) dt &= \left[\frac{t^4}{4} + t^2 + t \right]_0^1 = \frac{9}{4}. \\ \bullet \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2t}{t^2 - 1} dt &= \left[\ln |t^2 - 1| \right]_0^{\frac{1}{2}} = \ln \frac{3}{4}. \\ \bullet \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \left(2t + \frac{\pi}{2} \right) dt &= \left[-\frac{1}{2} \cos \left(2t + \frac{\pi}{2} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}. \\ \bullet \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t e^{\sin t} dt &= \left[e^{\sin t} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = e - 1. \end{aligned}$$

Intégration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle K , a et b deux éléments de K .

On sait que la fonction uv est dérivable et que $(uv)' = uv' + u'v$. Si de plus les fonctions u' et v' sont continues sur K , alors uv' et $u'v$ sont continues sur K .

$$\text{On a : } \int_a^b (uv)'(t) dt = \int_a^b (uv')(t) dt + \int_a^b (u'v)(t) dt ; \text{ donc : } \int_a^b u(t) v'(t) dt = \left[u(t) v(t) \right]_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt.$$

On en déduit la propriété suivante.

Propriété

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle K telles que les dérivées u' et v' sont continues sur K , a et b deux éléments de K .

$$\text{On a : } \int_a^b u(t) v'(t) dt = \left[u(t) v(t) \right]_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt.$$

Cette méthode est connue sous le nom d'intégration par parties.

Exemples

$$\bullet \text{ Calculer : } \int_1^2 \ln t dt.$$

Posons : $u(t) = \ln t$ et $v'(t) = 1$.

On a : $u'(t) = \frac{1}{t}$; choisissons : $v(t) = t$.

u' et v' sont continues sur $[1 ; 2]$.

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \int_1^2 \ln t dt &= \left[t \ln t \right]_1^2 - \int_1^2 dt \\ &= \left[t \ln t - t \right]_1^2 \\ &= 2 \ln 2 - 1. \end{aligned}$$

$$\bullet \text{ Calculer : } \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t dt.$$

Posons : $u(t) = t$ et $v'(t) = \cos t$.

On a : $u'(t) = 1$; choisissons : $v(t) = \sin t$.

u' et v' sont continues sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$.

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t dt &= \left[t \sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt \\ &= \left[t \sin t + \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

• Calculer : $\int_0^\pi \sin t e^t dt$.

– Posons : $u(t) = \sin t$ et $v'(t) = e^t$.

On a : $u'(t) = \cos t$; choisissons : $v(t) = e^t$.

u' et v' sont continues sur $[0 ; \pi]$.

On en déduit que : $\int_0^\pi \sin t e^t dt = \left[\sin t e^t \right]_0^\pi - \int_0^\pi \cos t e^t dt = \int_0^\pi -\cos t e^t dt$.

– Posons : $w(t) = -\cos t$ et $v'(t) = e^t$.

On a : $w'(t) = \sin t$; choisissons : $v(t) = e^t$.

w' et v' sont continues sur $[0 ; \pi]$.

On en déduit que : $\int_0^\pi \sin t e^t dt = \int_0^\pi -\cos t e^t dt = \left[-\cos t e^t \right]_0^\pi - \int_0^\pi \sin t e^t dt$.

– Donc : $\int_0^\pi \sin t e^t dt = \frac{1}{2} \left[-\cos t e^t \right]_0^\pi = \frac{e^\pi + 1}{2}$.

Changement de variable affine

Soit f une fonction continue sur un intervalle K , $t \mapsto \alpha t + \beta$ une fonction affine non constante, a et b deux nombres réels tels que, pour tout nombre réel x compris entre a et b , le nombre $\alpha x + \beta$ appartienne à K .

Si F est une primitive de f sur K , la fonction $x \mapsto \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta)$ est une primitive de $x \mapsto f(\alpha x + \beta)$.

On a donc : $\int_a^b f(\alpha t + \beta) dt = \left[\frac{1}{\alpha} F(\alpha t + \beta) \right]_a^b = \frac{1}{\alpha} F(\alpha b + \beta) - \frac{1}{\alpha} F(\alpha a + \beta)$
 $= \left[\frac{1}{\alpha} F(u) \right]_{\alpha a + \beta}^{\alpha b + \beta} = \int_{\alpha a + \beta}^{\alpha b + \beta} \frac{1}{\alpha} f(u) du$.

M

Pour calculer l'intégrale $\int_a^b f(\alpha t + \beta) dt$ ($\alpha \neq 0$), on peut utiliser le procédé suivant :

- faire le changement de variable : $u = \alpha t + \beta$; on obtient : $du = \alpha dt$;
- utiliser l'égalité : $\int_a^b f(\alpha t + \beta) dt = \int_{\alpha a + \beta}^{\alpha b + \beta} \frac{1}{\alpha} f(u) du$.

Exemple

Calculer : $I = \int_{-1}^0 \frac{t}{\sqrt{2t+3}} dt$.

Posons : $u = 2t + 3$. On a : $du = 2 dt$; donc : $dt = \frac{1}{2} du$.

De plus : $t = -1 \Leftrightarrow u = 1$;
 $t = 0 \Leftrightarrow u = 3$.

On en déduit que : $I = \int_1^3 \frac{\frac{1}{2}(u-3)}{\sqrt{u}} \times \frac{1}{2} du = \frac{1}{4} \int_1^3 \left(\sqrt{u} - \frac{3}{\sqrt{u}} \right) du$
 $= \frac{1}{4} \left[\frac{2}{3} u \sqrt{u} - 6 \sqrt{u} \right]_1^3 = \frac{4}{3} - \sqrt{3}$.

Intégration de fonctions paires, impaires, périodiques

Propriétés 1

Soit f une fonction continue sur un intervalle K symétrique par rapport à 0.

Pour tout a élément de K , on a :

- si f est paire, $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$;
- si f est impaire, $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$.

Démonstration

Soit a un élément de K . On a : $\int_{-a}^a f(t) dt = \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt$.

Posons : $u = -t$; on obtient : $\int_{-a}^0 f(t) dt = - \int_a^0 f(-u) du = \int_0^a f(-u) du$.

• Si f est paire, on a : $\int_0^a f(-u) du = \int_0^a f(u) du$; donc $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$.

• Si f est impaire, on a : $\int_0^a f(-u) du = - \int_0^a f(u) du$; donc $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$.

Interprétation graphique

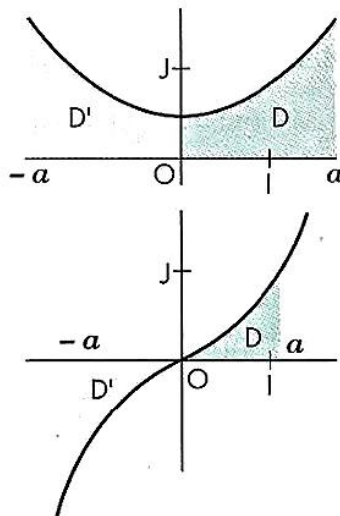
Supposons que la fonction f soit positive sur $[0 ; a]$ ($a > 0$).

• Si f est paire, les domaines D et D' sont symétriques par rapport à (OJ) et ont la même aire.

Donc : $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$.

• Si f est impaire, les domaines D et D' sont symétriques par rapport à O et ont la même aire.

Donc : $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$.



Exemples

• La fonction $t \mapsto \cos 2t$ est paire et continue sur $\mathbb{R}$;

donc : $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t dt = 2 \left[\frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$.

• La fonction $t \mapsto \sin 2t$ est impaire et continue sur $\mathbb{R}$;

donc : $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2t dt = 0$.

Propriété 2

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique, de période p .

Pour tous nombres réels a et b , on a :

$$\bullet \int_{a+p}^{b+p} f(t) dt = \int_a^b f(t) dt \quad ; \quad \bullet \int_a^{a+p} f(t) dt = \int_0^p f(t) dt.$$

Démonstration

f est continue sur $\mathbb{R}$ et périodique, de période p ; donc si pour tout nombre réel x on a : $f(x+p) = f(x)$. Soit a et b deux nombres réels.

• Posons : $x = t - p$; on obtient : $\int_{a+p}^{b+p} f(t) dt = \int_a^b f(x+p) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$.

• On a : $\int_a^b f(t) dt = \int_{a+p}^{b+p} f(t) dt$.

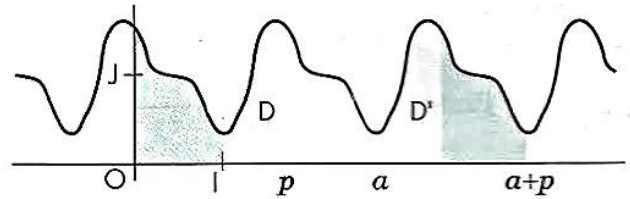
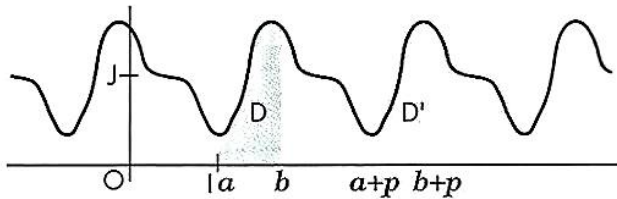
$$= \int_{a+p}^a f(t) dt + \int_a^b f(t) dt + \int_b^{b+p} f(t) dt.$$

On en déduit que : $\int_a^{a+p} f(t) dt = \int_b^{b+p} f(t) dt$;

en particulier pour $b = 0$, on a : $\int_a^{a+p} f(t) dt = \int_0^p f(t) dt$.

Interprétation graphique

Supposons que la fonction f soit positive sur $\mathbb{R}$.



D' est l'image de D par la translation de vecteur $p\vec{OI}$; donc : $\mathcal{A}(D) = \mathcal{A}(D')$;

c'est-à-dire : $\int_{a+p}^{b+p} f(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$

D et D' sont superposables par découpages.

Donc : $\mathcal{A}(D) = \mathcal{A}(D')$;

c'est-à-dire : $\int_a^{a+p} f(t) dt = \int_0^p f(t) dt.$

Exemples

La fonction $t \mapsto \cos 2t$ est continue sur $\mathbb{R}$ et périodique, de période π ; donc :

$$\bullet \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{6}} \cos 2t dt = \int_{-\frac{3\pi}{4}+\pi}^{\frac{5\pi}{6}+\pi} \cos 2t dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \cos 2t dt = \frac{\sqrt{3}-2}{4} ;$$

$$\bullet \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos 2t dt = \int_{\frac{\pi}{2}+\pi}^{\frac{3\pi}{2}+\pi} \cos 2t dt = \int_0^{\pi} \cos 2t dt = 0.$$

2.2. Intégration de fonctions particulières

Intégration des polynômes trigonométriques

On a vu dans le chapitre 11 (§ 1.3.) deux méthodes pour déterminer une primitive d'un polynôme trigonométrique. On utilise ces résultats pour calculer les intégrales suivantes.

1. Calculer : $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 t \sin t + 3 \sin^3 t) dt.$

On a : $\forall t \in \mathbb{R}, \cos^3 t \sin t + 3 \sin^3 t = \sin t (\cos^3 t + 3 \sin^2 t) = \sin t (\cos^3 t - 3 \cos^2 t + 3).$

Donc : $A = \left[-\frac{\cos^4 t}{4} + \cos^3 t - 3 \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9}{4}.$

2. Calculer : $B = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos^2 t - 2 \sin^4 t) dt.$

On a : $\forall t \in \mathbb{R}, \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$ et $\sin^4 t = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^4$

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{e^{4it} + e^{-4it}}{2} - 4 \frac{e^{2it} + e^{-2it}}{2} + 3 \right).$$

Donc : $\forall t \in \mathbb{R}, \cos^2 t - 2 \sin^4 t = -\frac{1}{4} \cos 4t + \frac{3}{2} \cos 2t - \frac{1}{4}.$

On obtient : $B = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(-\frac{1}{4} \cos 4t + \frac{3}{2} \cos 2t - \frac{1}{4} \right) dt$

$$= \left[-\frac{\sin 4t}{16} + \frac{3}{4} \sin 2t - \frac{t}{4} \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= -\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{8}.$$

Intégration des fonctions rationnelles

1. a) Déterminer deux nombres réels a et b tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}, \frac{1}{t^2 - t - 2} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t-2}.$$

b) Calculer l'intégrale : $A = \int_0^1 \frac{1}{t^2 - t - 2} dt.$

$$\begin{aligned} \text{a) On a : } \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}, \frac{1}{t^2 - t - 2} &= \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t-2} \Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ -2a+b=1 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{3} \\ b=\frac{1}{3} \end{cases}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) La fonction } t \mapsto \frac{1}{t^2 - t - 2} \text{ est continue sur } [0; 1]. \text{ On obtient : } B &= \int_0^1 \left(-\frac{1}{3(t+1)} + \frac{1}{3(t-2)} \right) dt \\ &= \frac{1}{3} \left[\ln \left| \frac{t-2}{t+1} \right| \right]_0^1 = -\frac{2}{3} \ln 2. \end{aligned}$$

2. a) Déterminer trois nombres réels a , b et c tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{t(t^2+1)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{t^2+1}.$$

b) Calculer l'intégrale : $B = \int_1^2 \frac{dt}{t(t^2+1)}.$

$$\text{a) On a : } \forall t \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{t(t^2+1)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1} ; \text{ donc : } a=1, b=-1 \text{ et } c=0.$$

b) La fonction $t \mapsto \frac{1}{t(t^2+1)}$ est continue sur l'intervalle $[1; 2]$.

$$\text{On obtient : } B = \int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1} \right) dt = \left[\ln t - \frac{1}{2} \ln(t^2+1) \right]_1^2 = \frac{3}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 5.$$

2.3. Calcul approché d'une intégrale

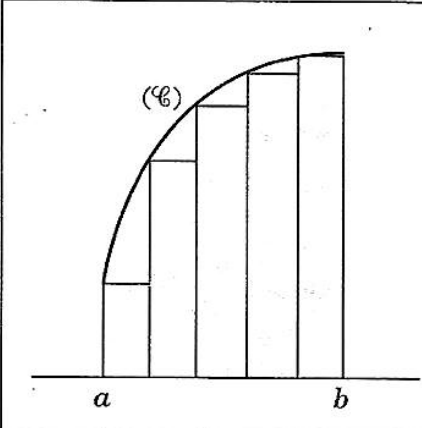
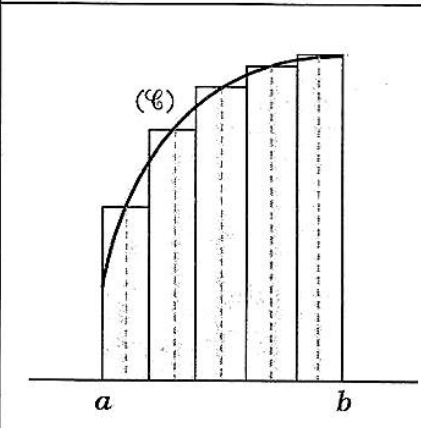
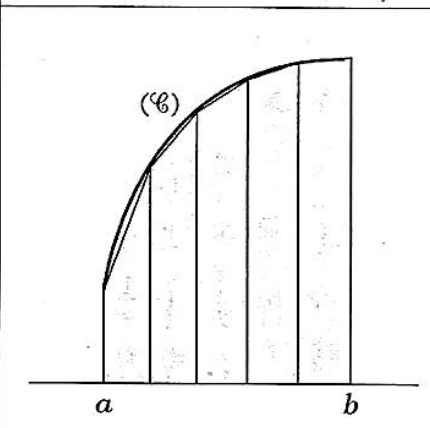
Introduction

Soit f une fonction continue sur un intervalle K , a et b ($a < b$) deux éléments de K et $A = \int_a^b f(t) dt$.

Lorsqu'on ne peut pas déterminer une primitive de f sur K , on calcule une valeur approchée A' de A . L'erreur commise en remplaçant A par A' est $|A - A'|$.

Il existe plusieurs méthodes permettant d'obtenir des valeurs approchées d'une intégrale A .

Les schémas ci-dessous illustrent trois de ces méthodes lorsque f est positive sur $[a; b]$.

Méthode des rectangles	Méthode du point médian	Méthode des trapèzes
		

Dans chacun des cas : • on partage l'intervalle $[a; b]$ en intervalles de même amplitude ;

• on prend pour valeur approchée de $\int_a^b f(t) dt$ l'aire du domaine colorié.

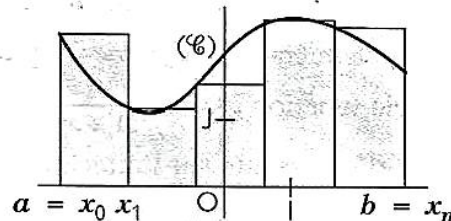
Méthode des rectangles

On partage l'intervalle $[a; b]$ en n intervalles de même amplitude

$\frac{b-a}{n}$ et d'extrémités $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$.

Pour tout entier naturel i ($0 \leq i \leq n-1$) on prend pour valeur approchée

de $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t) dt$ le nombre réel : $\frac{b-a}{n} f(x_i)$



On pose : $s_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$; s_n est une valeur approchée de $A = \int_a^b f(t) dt$.

Précisons l'incertitude de la valeur approchée et démontrons que la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ a pour limite A .

On suppose que la fonction f est dérivable sur $[a; b]$ et que $|f'|$ est majorée par un nombre réel M sur cet intervalle.

Pour tout entier naturel i ($0 \leq i \leq n-1$), on a :

$$\begin{aligned} \forall t \in [x_i; x_{i+1}], |f(t) - f(x_i)| &\leq M(t - x_i) &\Rightarrow \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(t) - f(x_i)| dt &\leq \frac{M}{2} [(t - x_i)^2]_{x_i}^{x_{i+1}} \\ & &\Rightarrow \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(t) - f(x_i)] dt \right| &\leq \frac{M}{2} \left(\frac{b-a}{n} \right)^2. \end{aligned}$$

On en déduit, par sommation sur les n intervalles, que : $|A - s_n| \leq \frac{M}{2n} (b-a)^2$.

Donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = A$.

Cette étude nous conduit à énoncer la propriété suivante.

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a; b]$, telle que $|f'|$ admet un majorant M sur cet intervalle.

Lorsque l'on partage $[a; b]$ en n intervalles de même amplitude et d'extrémités $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$,

on a : • la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, de terme général $s_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$, converge vers $A = \int_a^b f(t) dt$;

• $\forall n \in \mathbb{N}^*, |A - s_n| \leq \frac{M}{2n} (b-a)^2$.

Remarques

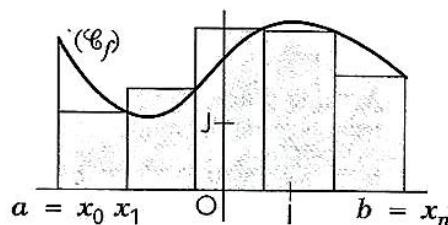
• La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, de terme général $S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})$, converge également vers A .

• Lorsque la fonction f est croissante, on obtient :

$$s_n \leq \int_a^b f(t) dt \leq S_n ;$$

lorsque la fonction f est décroissante, on obtient :

$$S_n \leq \int_a^b f(t) dt \leq s_n.$$



Exemples d'utilisation



1. Déterminer une valeur approchée de $A = \int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, en partageant l'intervalle $[0; 1]$ en 10 intervalles de même amplitude. Majorer l'erreur commise.

• Soit la fonction $f : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$.

On a : $s_{10} = \frac{1}{10} \left[f(0) + f\left(\frac{1}{10}\right) + \dots + f\left(\frac{9}{10}\right) \right]$; donc : $A \approx 0,875$.

• f est dérivable sur $[0; 1]$ et sa dérivée est la fonction : $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$.

La fonction $|f'|$ est majorée par 1 sur $[0; 1]$; donc : $|s_{10} - A| \leq 5 \times 10^{-2}$.



2. Déterminer un encadrement de $B = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$, en partageant l'intervalle $[0; 1]$ en 5 intervalles de même amplitude.

Soit la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

g est décroissante sur l'intervalle $[0; 1]$; donc : $S_5 \leq B \leq s_5$.

On a : $s_5 = \frac{1}{5} \left[g(0) + g\left(\frac{1}{5}\right) + \dots + g\left(\frac{4}{5}\right) \right]$ et $S_5 = \frac{1}{5} \left[g\left(\frac{1}{5}\right) + \dots + g\left(\frac{4}{5}\right) + g(1) \right]$.

On obtient : $s_5 \approx 0,83$ et $S_5 \approx 0,73$.

3. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général : $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{\pi k}{n}$.

Soit la fonction $h : x \mapsto \cos \pi x$.

Partageons l'intervalle $[0; 1]$ en n intervalles de même amplitude ($n \in \mathbb{N}^*$).

On a : $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right)$; u_n est une valeur approchée, par la méthode des rectangles, de $\int_0^1 h(t) dt$.

Or, h est dérivable sur $[0; 1]$ et $|h'|$ est majorée par π sur cet intervalle.

Donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \int_0^1 \sin \pi t dt = -\frac{1}{\pi} [\cos \pi t]_0^1 = \frac{2}{\pi}$.

Exercices

2.a Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_0^4 (x-2)(x^2-4x+1)^3 dx$ b) $\int_0^1 \frac{2t dt}{1+t^2}$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^5 t dt$ d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$

e) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{2x} dx$ f) $\int_0^1 t e^{t^2+1} dt$

g) $\int_0^2 \frac{2e^{2x}+3}{e^{2x}+3x} dx$ h) $\int_1^e \frac{\ln^3 x}{x} dx$

2.b À l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt$ b) $\int_1^e x \ln x dx$

c) $\int_2^{-1} x e^x dx$ d) $\int_1^2 t \sqrt{-t+3} dt$

2.c En utilisant un changement de variable affine, calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-\frac{5}{2}}^{-2} (2t+5)^7 dt$ b) $\int_0^1 \sqrt{x+2} dx$

c) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$ d) $\int_1^2 t \sqrt{-t+3} dt$

2.d Sans calculer les intégrales, justifier les égalités suivantes.

a) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x \cos x) dx = 0$ b) $\int_1^{-1} \frac{x^3}{x^4-x^2+3} dx = 0$

c) $\int_{-1}^2 \frac{x}{1+|x|} dx = \int_1^2 \frac{x}{1+x} dx$

d) $\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} (\sin 2x - \cos 2x) dx = -2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 2x dx$

2.e Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 5x dx$ b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^4 x dx$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^4 x \sin^2 x dx$ d) $\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 x - \sin^2 x) dx$

2.f a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; -\frac{1}{2}\}$,

$$\frac{8x+5}{2x^2+3x+1} = \frac{3}{x+1} + \frac{2}{2x+1}$$

b) En déduire la valeur de $\int_0^2 \frac{8x+5}{2x^2+3x+1} dx$.

2.g a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$,

$$\frac{1}{x^3+x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$$

b) En déduire la valeur de $\int_1^3 \frac{1}{x^3+x^2} dx$.

3 Applications du calcul intégral

3.1. Calculs d'aires et de volumes

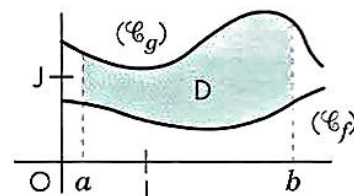
Calculs d'aires

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle K , $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ leurs représentations graphiques respectives, a et b deux éléments de K ($a < b$).

On suppose que $0 \leq f \leq g$ sur $[a; b]$ et on se propose de calculer l'aire du domaine D délimité par $(\mathcal{C}_f)$, $(\mathcal{C}_g)$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

On désigne par D_1 (respectivement D_2) le domaine délimité par $(\mathcal{C}_f)$ (respectivement $(\mathcal{C}_g)$), (OI) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \mathcal{A}(D) &= \mathcal{A}(D_2) - \mathcal{A}(D_1) \\ &= \int_a^b g(t) dt - \int_a^b f(t) dt \\ &= \int_a^b [g(t) - f(t)] dt. \end{aligned}$$

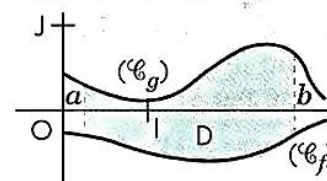


La propriété suivante, que nous admettons, généralise ce résultat.

Propriété

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle K , $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ leurs représentations graphiques respectives, a et b deux éléments de K ($a < b$).

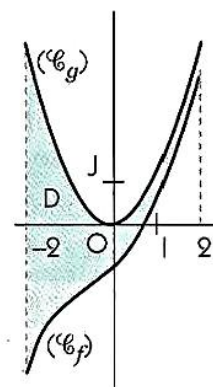
Lorsque $f \leq g$ sur $[a; b]$, l'aire du domaine D délimité par $(\mathcal{C}_f)$, $(\mathcal{C}_g)$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est : $\mathcal{A}(D) = \int_a^b [g(t) - f(t)] dt$.



Exemples

• Sur la figure ci-contre, $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ sont les représentations graphiques respectives des fonctions $f: x \mapsto x^2 - e^{-x}$ et $g: x \mapsto x^2$. Calculer l'aire du domaine D colorié.

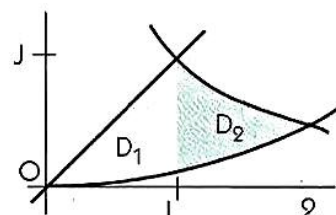
$$\text{On a : } \mathcal{A}(D) = \int_{-2}^2 [t^2 - (t^2 - e^{-t})] dt = [-e^{-t}]_{-2}^2 = e^2 - e^{-2}.$$



• Calculer l'aire du domaine D délimité par les courbes d'équations $y = x$, $y = \frac{1}{x}$ et $y = \frac{x^2}{8}$. Le domaine D peut être partagé en deux domaines D_1 et D_2 .

$$\begin{aligned} \text{On a : } \mathcal{A}(D_1) &= \int_0^1 \left(t - \frac{t^2}{8} \right) dt = \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{24} \right]_0^1 = \frac{11}{24}; \\ \mathcal{A}(D_2) &= \int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{t^2}{8} \right) dt = \left[\ln t - \frac{t^3}{24} \right]_1^2 = \ln 2 - \frac{7}{24}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \mathcal{A}(D) = \ln 2 + \frac{1}{6}.$$



Calculs de volumes

Dans cette étude, l'espace est muni du repère orthonormé (O, I, J, K) ; l'unité de volume est le volume du cube de dimensions OI , OJ et OK .

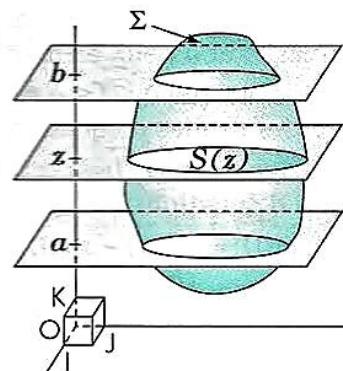
Nous admettons la propriété suivante.

Propriété

Soit Σ un solide limité par les plans d'équations $z = a$, $z = b$ ($a < b$) et S la fonction qui à tout élément z de $[a ; b]$ associe l'aire de la section du solide S par le plan de cote z .

Si la fonction $z \mapsto S(z)$ est continue sur $[a ; b]$, alors le volume de Σ

(en unités de volume) est : $\int_a^b S(z) dz$.



Exemples

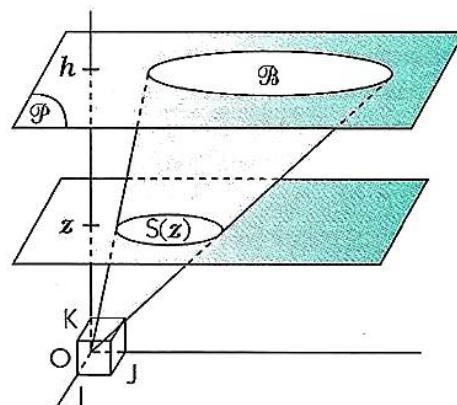
• Volume du cône et de la pyramide

Soit h la hauteur ($h \neq 0$) et $\mathcal{B}$ l'aire de la base d'un cône. Choisissons comme origine du repère le sommet O de ce cône et pour axe (OK) la perpendiculaire au plan $(\mathcal{P})$ de la base. La section du cône par le plan de cote z ($0 \leq z \leq h$) est l'image de la base par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{z}{h}$.

Son aire est : $S(z) = \mathcal{B} \times \left(\frac{z}{h}\right)^2$.

Le volume du cône est donc :

$$V = \int_0^h \frac{\mathcal{B}}{h^2} z^2 dz = \left[\frac{\mathcal{B}}{h^2} \frac{z^3}{3} \right]_0^h = \frac{\mathcal{B} \times h}{3}.$$



La démonstration et la formule sont identiques pour une pyramide ; on retrouve ainsi deux résultats admis au collège.

• Volume de la boule de rayon R

Choisissons comme origine du repère le centre de la boule.

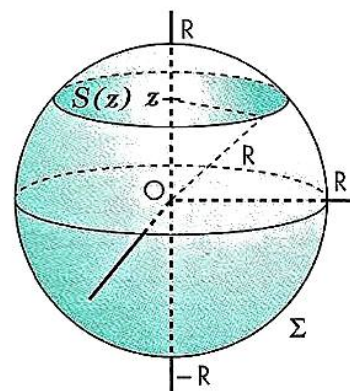
La section de la boule par le plan de cote z ($-R \leq z \leq R$) est un disque de rayon $\sqrt{R^2 - z^2}$.

L'aire de ce disque est : $S(z) = \pi (R^2 - z^2)$.

Le volume de la boule est donc :

$$V = \int_{-R}^R \pi (R^2 - z^2) dz = \left[\pi \left(R^2 z - \frac{z^3}{3} \right) \right]_{-R}^R = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

On retrouve encore un résultat admis au collège et démontré par Archimède (287-212 av. J.-C.).



3.2. Fonctions définies par une intégrale

Fonctions $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$

Soit F la fonction de $]0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$ et $(\mathcal{C}_F)$ sa courbe représentative.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_F de F .
2. Étudier les variations de F sur D_F .
3. Étudier le signe de la fonction f définie par : $f(x) = F(x) - \ln x$.

En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

4. Étudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_F)$ et tracer cette courbe.

1. La fonction $x \mapsto \frac{e^x}{x}$ est continue sur $]0; +\infty[$; donc : $D_F =]0; +\infty[$.

2. la fonction F est dérivable sur D_F et sa dérivée est la fonction $F' : x \mapsto \frac{e^x}{x}$, qui est une fonction positive sur D_F ; donc, F est une fonction croissante.

3. On a : $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt - \int_1^x \frac{1}{t} dt = \int_1^x \frac{e^t - 1}{t} dt$.

La fonction $t \mapsto \frac{e^t - 1}{t}$ est positive sur $]0; +\infty[$; donc, f est négative sur $]0; 1[$ et positive sur $]1; +\infty[$.

• On a : $\forall x \in]0; 1[, F(x) \leq \ln x$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$;

donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = -\infty$.

• On a : $\forall x \in]1; +\infty[, F(x) \geq \ln x$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$;

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.

On en déduit le tableau de variation de F .

4. On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = -\infty$; donc (O) est asymptote à $(\mathcal{C}_F)$.

Soit x un élément de $]1; +\infty[$.

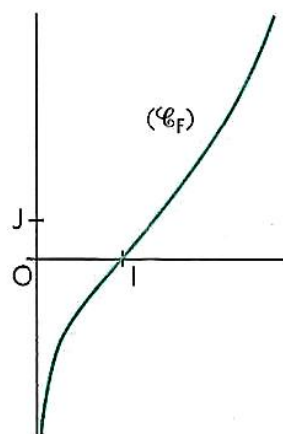
On a : $\forall t \in [1; x], \frac{e^t}{t} \geq \frac{e^t}{x}$; donc : $F(x) \geq \frac{1}{x} \int_1^x e^t dt$.

On en déduit que : $\frac{F(x)}{x} \geq \frac{e^x - e}{x^2}$.

Or : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^x}{x^2} (1 - e^{1-x}) \right] = +\infty$.

On en déduit que $(\mathcal{C}_F)$ a en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de (O) .

x	0	1	$+\infty$
$F'(x)$		+	
$F(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$



Fonctions $x \mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt$



Soit G la fonction définie par $G(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$ et $(\mathcal{C}_G)$ sa courbe représentative.

1. Démontrer que la fonction G est impaire.
2. Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, \frac{x}{\sqrt{1+16x^4}} \leq G(x) \leq \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}$.

En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$.

3. Justifier que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.

4. a) Dresser le tableau de variation de G .

b) Calculer une valeur approchée de $G\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ en utilisant la méthode des rectangles.

(On partagera l'intervalle $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right]$ en 10 intervalles de même amplitude.)

- c) Tracer $(\mathcal{C}_G)$.

1. La fonction $f: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ est continue sur $\mathbb{R}$; donc : $D_G = \mathbb{R}$.

Soit x un élément de $\mathbb{R}$. En effectuant le changement de variable $u = -t$, on obtient :

$$G(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = \int_x^{2x} \frac{-du}{\sqrt{1+u^4}} = -G(x).$$

Donc la fonction G est impaire.

2. On a : $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = -2x^3(1+x^4)^{-\frac{3}{2}}$, la fonction f est donc décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

Soit x un élément de $]0 ; +\infty[$. En appliquant l'inégalité de la moyenne à f sur $[x ; 2x]$, on obtient :

$$x f(2x) \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \leq x f(x) ;$$

$$\text{donc : } \forall x \in]0 ; +\infty[, \frac{x}{\sqrt{1+16x^4}} \leq G(x) \leq \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}.$$

$$\text{Or : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{1+16x^4}} = 0 ; \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0.$$

3. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = F(2x) - F(x)$.

G est la différence de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \forall x \in \mathbb{R}, G'(x) &= 2f(2x) - f(x) = \frac{2}{\sqrt{1+16x^4}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{\sqrt{4+4x^4} - \sqrt{1+16x^4}}{\sqrt{1+16x^4} \sqrt{1+x^4}} \\ &= \frac{3(1-4x^4)}{\sqrt{1+16x^4} \sqrt{1+x^4} (\sqrt{4+4x^4} + \sqrt{1+16x^4})} \\ &= \frac{3(1+2x^2)(1-\sqrt{2}x)(1+\sqrt{2}x)}{\sqrt{1+16x^4} \sqrt{1+x^4} (\sqrt{4+4x^4} + \sqrt{1+16x^4})}. \end{aligned}$$

4. a) G est une fonction impaire, on peut restreindre son étude à $]0 ; +\infty[$. On obtient le tableau de variation ci-contre.

b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée la fonction $f': x \mapsto -2x^3(1+x^4)^{-\frac{3}{2}}$.

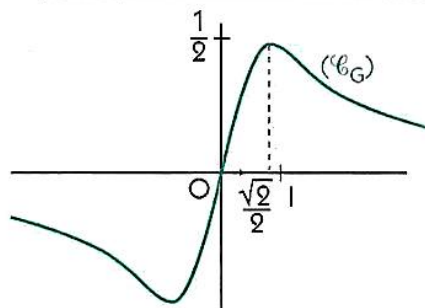
L'amplitude de l'intervalle $[\frac{\sqrt{2}}{2} ; \sqrt{2}]$ est $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

On en déduit que :

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} f(t) dt \approx \frac{\sqrt{2}}{20} \sum_{k=0}^9 f\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + k \frac{\sqrt{2}}{20}\right).$$

Avec une calculatrice, on obtient : $G(\frac{\sqrt{2}}{2}) \approx 0,47$.

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$G'(x)$	+	0	-
$G(x)$	0	$G(\frac{\sqrt{2}}{2})$	0



3.3. Travaux dirigés

Longueur d'un arc

Le repère (O, I, J) est orthonormé.

On admet que la distance d parcourue par un mobile sur sa trajectoire entre deux instants t_1 et t_2 ($t_1 < t_2$)

est $d = \int_{t_1}^{t_2} V(t) dt$, où $V(t)$ désigne le module du vecteur vitesse à l'instant t .

Un mobile M se déplace dans le plan. À tout instant t ($t > 0$) les coordonnées $(x(t) ; y(t))$ de M sont :

$$x(t) = t^2 \text{ et } y(t) = t\left(1 - \frac{t^2}{3}\right).$$

- 1°) Déterminer une équation de la trajectoire ($\mathcal{C}$) de M ; tracer ($\mathcal{C}$).
 2°) À tout instant t le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ a pour coordonnées $(x'(t) ; y'(t))$.
 a) Calculer $V(t)$.
 b) Déterminer la distance parcourue par M entre les instants 0 et 3.
 Représenter graphiquement la partie de ($\mathcal{C}$) correspondante.
 c) Déterminer la distance parcourue par M entre les points d'abscisses 0 et 3.

Solution

1°) On a : $t = \sqrt{x}$ et $x \in [0 ; +\infty[$;

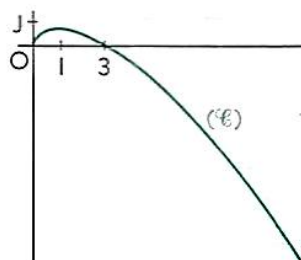
donc : $y = \sqrt{x} \left(1 - \frac{x}{3}\right)$ ($x \in [0 ; +\infty[$).

($\mathcal{C}$) est donc la courbe représentative de la fonction $f: x \mapsto \sqrt{x} \left(1 - \frac{x}{3}\right)$.

Cette fonction est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et a pour dérivée la fonction $f': x \mapsto \frac{1-x}{2\sqrt{x}}$.

On en déduit le tableau de variation et la trajectoire ($\mathcal{C}$).

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
$f(x)$	0	$\frac{2}{3}$	$-\infty$



2°) a) On a : $x'(t) = 2t$ et $y'(t) = 1 - t^2$.

Donc : $V(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = 1 + t^2$.

b) La distance parcourue par M entre les instants 0 et 3 est : $\int_0^3 (1 + t^2) dt = \left[t + \frac{t^3}{3}\right]_0^3 = 12$.

L'arc de ($\mathcal{C}$) correspondant est colorié sur la figure.

c) L'arc de ($\mathcal{C}$) compris entre les points d'abscisses 0 et 3 a pour longueur la distance parcourue par M entre les instants 0 et $\sqrt{3}$.

C'est-à-dire : $\int_0^{\sqrt{3}} (1 + t^2) dt = \left[t + \frac{t^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.

Détermination de centres d'inertie

• Le centre d'inertie $G \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix}$ d'un système de n points matériels $A_k \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$ de masses respectives m_k est le barycentre des points A_k affectés des coefficients m_k .

$$\text{On a : } x_G = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{\sum_{k=1}^n m_k}.$$

• On admet que le centre d'inertie G d'une plaque homogène, délimitée par une courbe ($\mathcal{C}$), (OI) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, a pour coordonnées :

$$x_G = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}.$$

1°) Déterminer les coordonnées du centre d'inertie du quart de disque, ensemble des points $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que : $x^2 + y^2 \leq R^2$, $0 \leq x$ et $0 \leq y$ ($0 \leq R$).

2°) Déterminer les coordonnées du centre d'inertie de la plaque homogène délimitée par la courbe d'équation $y = \ln x$, (OI) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Solution

1°) La droite d'équation $y = x$ est axe de symétrie de la plaque ; donc : $x_G = y_G$.
Le quart de cercle a pour équation : $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ ($0 \leq x \leq R$).

$$\text{Donc : } y_G = \frac{\frac{1}{2} \int_0^R (R^2 - x^2) dx}{\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx}$$

$$\bullet \frac{1}{2} \int_0^R (R^2 - x^2) dx = \frac{1}{2} \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^R = \frac{R^3}{3}$$

$$\bullet \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{\pi}{4} R^2 \text{ (aire du quart de disque)}$$

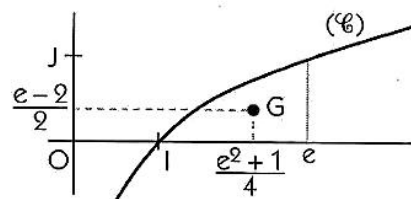
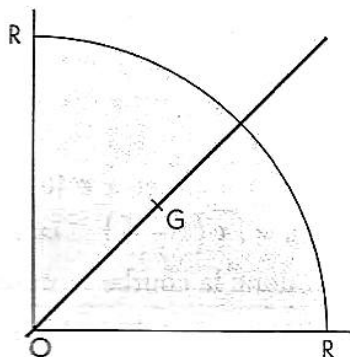
$$\text{Donc : } x_G = y_G = \frac{4R}{3\pi}$$

$$2^\circ) \text{ On a : } x_G = \frac{\int_1^e x \ln x dx}{\int_1^e \ln x dx} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{\frac{1}{2} \int_1^e \ln^2 x dx}{\int_1^e \ln x dx}$$

En utilisant la méthode d'intégration par parties, on obtient :

$$\int_1^e \ln x dx = 1, \quad \int_1^e x \ln x dx = \frac{e^2 + 1}{4} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \int_1^e \ln^2 x dx = \frac{e-2}{2}$$

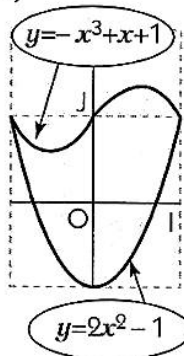
$$\text{Donc : } x_G = \frac{e^2 + 1}{4} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{e-2}{2}$$



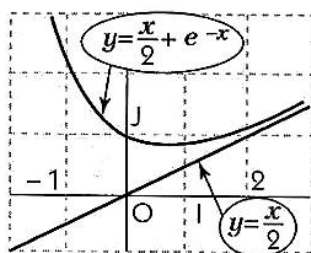
Exercices

3.a Calculer l'aire, en unités d'aire, de chacun des domaines coloriés suivants.

a)



b)



3.b L'unité graphique est égale à 2 cm sur chaque axe du repère.

Dans chacun des cas suivants, tracer les courbes représentatives des fonctions f et g puis calculer l'aire, en cm^2 , du domaine compris entre ces deux courbes.

a) $f(x) = -x^2 + 4x$ et $g(x) = (x-4)^2$;

b) $f(x) = \frac{x^2}{4}$ et $g(x) = 2\sqrt{x}$.

3.c n étant un entier naturel non nul, comparer géométriquement $\int_0^1 x^n dx$ et $\int_0^1 \sqrt[n]{x} dx$. Retrouver le résultat par le calcul.

3.d L'espace est muni du repère orthonormé (O, I, J, K) . Représenter en perspective les solides suivants puis calculer leurs volumes.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ z \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ z \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

3.e Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonction F et préciser sa fonction dérivée ; en déduire le sens de variation et le signe de F .

a) $F(x) = \int_1^x \frac{\sqrt{t}}{1+t^2} dt$ b) $F(x) = \int_1^x \sqrt{t} e^{-t} dt$

c) $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t+1} dt$ d) $F(x) = \int_x^1 e^{-t^2} dt$

3.f Soit f et g les fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad g(x) = \int_x^{2x} f(t) dt.$$

1. En notant F une primitive de f sur $\mathbb{R}$, exprimer $g(x)$ puis $g'(x)$ en fonction de x .

2. En déduire le sens de variation et le signe de la fonction g .

Exercices

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J) .

APPRENTISSAGE

Intégrale d'une fonction continue

1 Calculer les intégrales suivantes.

- a) $\int_{-1}^2 2t^3 dt$ b) $\int_{-1}^{\frac{3}{2}} -t^4 dt$
 c) $\int_{-1}^{-2} \frac{1}{t^3} dt$ d) $\int_0^9 \sqrt{s} ds$
 e) $\int_{\pi}^0 \sin 2t dt$ f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 - 3 \sin x) dx$
 g) $\int_0^{\pi} \sin(x + \frac{\pi}{4}) dx$ h) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (3 \cos x - \sin x) dx$.

2 Dans chacun des cas suivants, exprimer à l'aide d'une intégrale la primitive de la fonction f qui s'annule en 1 ; préciser l'ensemble de définition de cette primitive.

- a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ b) $f(x) = \frac{1}{4-x^2}$
 c) $f(x) = x\sqrt{2-x}$ d) $f(x) = \ln(1+x)$.

3 L'unité graphique est égale à 2 cm sur chaque axe du repère.

- 1.** Tracer la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x - x^3$.
2. Calculer l'aire, en cm^2 , de l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq x - x^3$.

4 L'unité graphique est égale à 2 cm sur (OI) et à 3 cm sur (OJ). Représenter les domaines suivants puis calculer leur aire en cm^2 .

- a) $\left\{ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right.$ b) $\left\{ 1 \leq x \leq 2 \right.$
 $\left. 0 \leq y \leq 3 + 2 \cos x \right\}$ $\left. 0 \leq y \leq \frac{2}{x^2} \right\}$

5 Calculer les intégrales suivantes.

- a) $\int_1^4 |x-3| dx$ b) $\int_2^{-1} |1-x|^3 dx$
 c) $\int_{-2}^2 |1-x^2| dx$ d) $\int_{-1}^2 |e^x - 1| dx$.

6 Sans les calculer, ranger par ordre croissant les intégrales suivantes.

$$\int_{0,1}^1 x e^{\sin x} dx, \int_{0,1}^1 \frac{e^{\sin x}}{x} dx, \int_{0,1}^1 x^2 e^{\sin x} dx \text{ et } \int_{0,1}^1 \sqrt{x} e^{\sin x} dx.$$

7 1. Démontrer que :

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi \right], \frac{\sin x}{1+x^2} \leq \frac{\sin x}{1+x^2} \leq \frac{\sin x}{1+\frac{\pi^2}{4}}.$$

2. En déduire un encadrement de $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$.

8 Soit a et b ($a < b$) deux nombres réels de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$.

1. Démontrer que :

$$\forall x \in [a; b], \frac{1}{\cos^2 a} \leq \frac{1}{\cos^2 x} \leq \frac{1}{\cos^2 b}.$$

2. En déduire que :

$$\frac{b-a}{\cos^2 a} \leq \tan b - \tan a \leq \frac{b-a}{\cos^2 b}.$$

9 Calculer la valeur moyenne de la fonction $x \mapsto |x|$ sur l'intervalle $[-2; 2]$, en utilisant :

- a) la formule ;
 b) l'interprétation graphique de la valeur moyenne.

10 On appelle valeur moyenne d'une fonction périodique continue sur $\mathbb{R}$, la valeur moyenne de cette fonction sur un intervalle dont l'amplitude est une période. Déterminer la valeur moyenne des fonctions $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos^2 x$.

Techniques de calcul intégral

11 Calculer les intégrales suivantes.

- a) $\int_0^1 \frac{3x}{(x^2+1)^2} dx$ b) $\int_{-2}^1 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx$
 c) $\int_3^0 x e^{-x^2} dx$ d) $\int_0^2 \frac{e^x}{e^x+3} dx$
 e) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx$ f) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x + \tan^3 x) dx$
 g) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos x dx$ h) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \sin 2x dx$.

12 Calculer les intégrales suivantes.

- a) $\int_{-2}^1 e^x (e^x - 1) dx$ b) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx$
 c) $\int_0^2 (2x+1) \sqrt{2x+1} dx$ d) $\int_2^1 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$
 e) $\int_{\frac{1}{e}}^{e^3} \frac{\ln x}{x} dx$ f) $\int_e^{e^3} \frac{1}{x \ln x} dx$
 g) $\int_e^{e^3} \frac{1}{x (\ln x)^2} dx$ h) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\tan^2 x}{\tan x} dx$.

13 Soit f la fonction définiesur l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ par : $f(x) = \frac{1}{1 - \sin x}$.

1. Exprimer à l'aide d'une intégrale la primitive de la fonction f qui s'annule en 0.

2. Déterminer cette primitive.

(On pourra remarquer que :

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[, \frac{1}{1 - \sin x} = \frac{1 + \sin x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}.)$$

Intégration par parties

14 À l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes.

$$\begin{array}{ll} a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1) \cos x \, dx & b) \int_0^{\pi} (x-1) \sin 3x \, dx \\ c) \int_0^2 (2x+1)e^{2x} \, dx & d) \int_2^3 (2x+1) \ln x \, dx \end{array}$$

15 À l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes.

$$\begin{array}{ll} a) \int_1^e x^2 \ln x \, dx & b) \int_1^{e^2} \sqrt{x} \ln x \, dx \\ c) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} \, dx & d) \int_0^1 x \sqrt{x+1} \, dx \end{array}$$

16 Dans chacun des cas suivants, à l'aide d'une intégration par parties déterminer une primitive de la fonction f sur K .

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = (x+1) \cos x, & K = \mathbb{R} \\ b) f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, & K =]0; +\infty[\\ c) f(x) = (3x+2)e^{2x}, & K = \mathbb{R} \\ d) f(x) = \ln \frac{x^2-1}{x^2}, & K =]1; +\infty[. \end{array}$$

17 À l'aide de deux intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes.

$$\begin{array}{ll} a) \int_0^{\pi} x^2 \cos x \, dx & b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin 2x \, dx \\ c) \int_0^1 x^2 e^x \, dx & d) \int_0^1 (3x^2 - x + 1) e^x \, dx \\ e) \int_0^1 x^2 e^{3x} \, dx & f) \int_{-1}^0 (1+x)^2 e^{-x} \, dx \\ g) \int_0^{\pi} \cos x e^x \, dx & h) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos 3x e^{2x} \, dx \end{array}$$

Changement de variable affine

18 À l'aide d'un changement de variable affine, calculer les intégrales suivantes.

$$\begin{array}{ll} a) \int_0^1 x \sqrt{x+1} \, dx & b) \int_{-8}^{-3} x \sqrt{1-x} \, dx \\ c) \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \sqrt{2x+1} \, dx & d) \int_{\frac{5}{3}}^2 \frac{x^2}{(3x-4)^5} \, dx \end{array}$$

19 Soit a et b deux nombres réels strictement positifs.

- Démontrer, à l'aide d'un changement de variable affine, que : $\int_1^a \frac{dt}{t} = \int_b^{ab} \frac{dt}{t}$.
- Quelle propriété de la fonction logarithme népérien retrouve-t-on ?

20 Sans faire de calcul, donner les valeurs des intégrales suivantes.

$$\begin{array}{ll} a) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (x^3 - \tan x) \, dx & b) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2x^2 \sin x \, dx \\ c) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\cos x + \sin x) \, dx & d) \int_{-1}^1 \ln \left(\frac{2-x}{2+x} \right) \, dx \end{array}$$

21 1. Calculer $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$.

2. En déduire la valeur des intégrales suivantes.

$$\begin{array}{ll} a) \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, dx \text{ et } \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \, dx \\ b) \int_0^{2\pi} \sin x \, dx \text{ et } \int_0^{2\pi} |\sin x| \, dx \\ c) \int_0^{3\pi} \sin x \, dx \text{ et } \int_0^{3\pi} |\sin x| \, dx \\ d) \int_{\frac{5\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \, dx \end{array}$$

Intégration de fonctions particulières

22 Calculer les intégrales suivantes.

$$\begin{array}{ll} a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x - 3 \cos x \sin x) \, dx & b) \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin^4 x \, dx \\ c) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^5 x \, dx & d) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \cos 2x \, dx \end{array}$$

23 On considère les deux intégrales :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^4 x \, dx \text{ et } B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \sin^4 x \, dx.$$

- Calculer $A+B$ et $A-B$.
- En déduire les valeurs de A et B .

24 On considère la fonction $f: x \mapsto \frac{2x+5}{(x+1)^2}$.

- Déterminer deux nombres réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}$.
- En déduire la valeur de $\int_0^3 \frac{2x+5}{(x+1)^2} \, dx$.

25 On considère la fonction $f: x \mapsto \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}$.

- Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$.
- En déduire la valeur de $\int_1^3 \frac{x^2-1}{x(x^2+1)} \, dx$.

26 On considère la fonction $f: x \mapsto \frac{x^3+3x^2+5x+2}{x+1}$.

- Déterminer quatre nombres réels a, b, c et d tels que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x+1}$.
- En déduire la valeur de $\int_0^3 \frac{x^3+3x^2+5x+2}{x+1} \, dx$.

Calcul approché d'une intégrale



27 En utilisant la méthode des rectangles, déterminer une valeur approchée de :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1+x^2} dx.$$

(On partagera l'intervalle $[-\frac{1}{2}; 1]$ en 15 intervalles de même amplitude.)



28 Soit $A = \int_{\frac{3}{5}}^{\frac{4}{5}} \sqrt{1-x^2} dx$.

1. En utilisant la méthode des rectangles et en partageant l'intervalle $[\frac{3}{5}; \frac{4}{5}]$ en 10 intervalles de même amplitude, déterminer un encadrement de A .

2. Déterminer le nombre d'intervalles nécessaire pour obtenir, par cette méthode, un encadrement d'amplitude inférieure à 2×10^{-3} .

29 1. Calculer $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$.

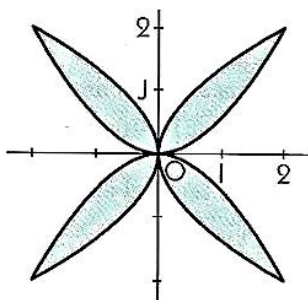
2. a) En partageant l'intervalle $[0; 1]$ en n intervalles de même amplitude, déterminer par la méthode des rectangles une valeur approchée en fonction de n de cette intégrale.

b) En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^n \frac{1}{n+p} = \ln 2$.

Calculs d'aires et de volumes

30 L'unité graphique est égale à 1 cm sur chaque axe du repère.

Le pétale de la fleur ci-contre, correspondant à $x \geq 0$ et $y \geq 0$, est limité par les courbes représentatives d'une fonction polynôme du second degré de $[0; 2]$ dans $[0; 2]$ et de sa fonction réciproque. Calculer l'aire, en cm^2 , de la fleur.



31 On considère les fonctions :

$$f: x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x \quad \text{et} \quad g: x \mapsto \frac{1}{4}x^2.$$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $f(x) \leq g(x)$.
- Représenter graphiquement les fonctions f et g sur le même graphique.
- Calculer l'aire, en unités d'aire, du domaine constitué des points dont les coordonnées vérifient : $f(x) \leq y \leq g(x)$.

32 Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x \ln |x|, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.
- Étudier f et tracer sa courbe représentative $(\mathcal{C})$.
- Calculer l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité

par $(\mathcal{C})$, (OI) et les droites d'équations $x = a$ et $x = 1$ ($0 < a < 1$).

b) Quelle est la limite de cette aire lorsque a tend vers 0 ?

3. En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par $(\mathcal{C})$, (OI) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$.

33 Le repère (O, I, J) est orthonormé.

Soit la fonction $f: x \mapsto x + \frac{1-e^x}{1+e^x}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

1. a) Démontrer que f est une fonction impaire.

b) Étudier f et tracer $(\mathcal{C})$.

2. a) Déterminer les primitives de f .

(On pourra remarquer que : $\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$.)

b) Calculer l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations $y = x - 1$, $x = 0$ et $x = a$ ($a > 0$).

c) Quelle est la limite de cette aire lorsque a tend vers $+\infty$?

34 Pour tout entier naturel non nul n et tout nombre réel a supérieur ou égal à 1, on désigne par $D_n(a)$

l'ensemble des points $M(\frac{x}{y})$ tels que : $\begin{cases} 1 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x^n} \end{cases}$.

1. Calculer l'aire, en unités d'aire, de $D_1(a)$.

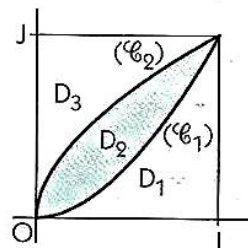
Déterminer la limite de cette aire lorsque a tend vers $+\infty$.

2. Calculer l'aire, en unités d'aire, de $D_n(a)$, pour $n > 1$. Démontrer que cette aire a une limite finie lorsque a tend vers $+\infty$.

35 Le repère (O, I, J) est orthonormé.

$(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ sont les courbes représentatives sur l'intervalle $[0; 1]$ des fonctions :

$$x \mapsto x^2 \quad \text{et} \quad x \mapsto \sqrt{x}.$$



1. Vérifier que les domaines D_1 , D_2 et D_3 ont la même aire.

2. En tournant autour de (OI), les domaines $D_1 \cup D_2$ (colorié) et D_3 engendrent deux solides S_1 et S_2 .

a) Comparer les volumes de S_1 et S_2 .

b) Pouvait-on prévoir un tel résultat ?

APPROFONDISSEMENT

36 1. Démontrer que :

$$\forall t \in [0; 1], \quad 0 \leq 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - \frac{1}{1+t} \leq t^5.$$

2. En déduire que : $\forall x \in [0; 1],$

$$0 \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ln(1+x) \leq \frac{x^6}{6}.$$

3. Déduire de l'inégalité précédente un nombre rationnel qui est une valeur approchée de $\ln(1,1)$ à 2×10^{-7} près par excès.

37 1. Démontrer que, pour tous entiers naturels p

et q , on a : $\int_0^1 x^p (1-x)^q dx = \int_0^1 x^q (1-x)^p dx$.

2. Calculer l'intégrale : $\int_0^1 x^2 (1-x)^{15} dx$.

38 Soit F et G les fonctions définies par :

$$F(x) = \ln\left(\tan \frac{x}{2}\right) \quad \text{et} \quad G(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

1. Préciser les ensembles de dérivabilité de F et de G, puis déterminer leurs fonctions dérivées.

2. En déduire le calcul des intégrales :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t} dt \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}.$$

39 Soit la fonction $f: x \mapsto (2-x)e^x$ et ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative.

1. Étudier la fonction f et tracer ($\mathcal{C}$).

2. Soit P la plaque homogène délimitée par ($\mathcal{C}$), (OI) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$.

Déterminer les coordonnées du centre d'inertie G de P.

40 Déterminer la position du centre d'inertie d'un demi-disque homogène de rayon R.

41 On désigne par ($\mathcal{C}$) la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x \ln x$.

1. Déterminer les coordonnées du centre d'inertie d'une plaque homogène délimitée par ($\mathcal{C}$), (OI) et les droites d'équations $x = a$ et $x = 1$ ($0 < a < 1$).

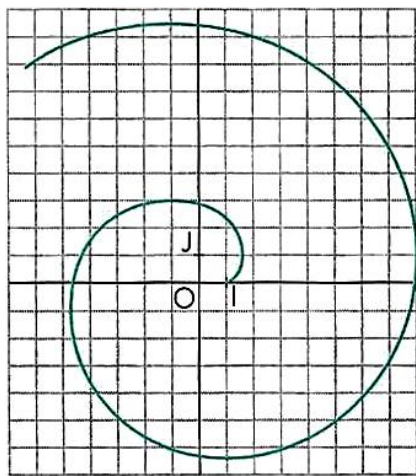
2. Déterminer la position limite de ce centre d'inertie, lorsque a tend vers 0.

42 La trajectoire ($\mathcal{C}$) d'un point mobile M du plan est définie par :

$$x(t) = \cos t + \cos^2 t \quad \text{et} \quad y(t) = \sin t + \frac{\sin 2t}{2} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Calculer la distance parcourue par M entre les instants 0 et $\frac{\pi}{2}$.

43 La courbe ($\mathcal{C}$) ci-dessous représente la trajectoire entre les instants 0 et 10 d'un mobile M dont le mouvement est tel qu'à tout instant t le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(t)$ a pour coordonnées : $(\cos t - t \sin t; \sin t + t \cos t)$.



À l'instant $t = \frac{\pi}{2}$, le mobile est en $M\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ et son vecteur vitesse a pour coordonnées $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

1. a) Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$.

b) Calculer $\|\vec{V}(t)\|$ et en déduire la longueur de ($\mathcal{C}$).

2. Déterminer une équation paramétrique de la courbe ($\mathcal{C}$).

44 1. Soit x un élément de $[0; +\infty[$.

Démontrer que : $\int_0^x \cos t \, dt \leq x$.

En déduire que : $\forall x \in [0; +\infty[, \sin x \leq x$.

2. Par un procédé analogue, démontrer les inégalités suivantes :

$$a) \forall x \in [0; +\infty[, \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$b) \forall x \in [0; +\infty[, \sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$$

$$c) \forall x \in [0; +\infty[, \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

$$d) \forall x \in [0; +\infty[, \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

$$e) \forall x \in [0; +\infty[, \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}$$

3. Déduire de c) et e) que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

4. Démontrer que $\frac{337}{384}$ est une valeur approchée par excès de $\cos \frac{1}{2}$ à $2,5 \times 10^{-5}$ près.

45 Le repère (O, I, J) est orthonormé.

1. En considérant l'aire du disque de centre O et de rayon

$$1, \text{ justifier que : } \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{\pi}{4}.$$

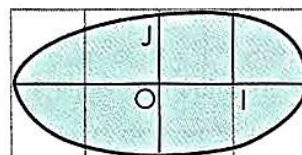
2. a) Soit a et b deux nombres réels strictement positifs. Déterminer l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par l'ellipse d'équation réduite : $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.

b) Sur la figure ci-dessous, on a représenté les fonctions :

$$x \mapsto \sqrt{1 - \left(\frac{x-1}{3}\right)^2}, \quad x \in [-2; 1]$$

$$x \mapsto \sqrt{1 - (x-1)^2}, \quad x \in [1; 2]$$

$$x \mapsto -\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}, \quad x \in [-2; 2].$$



Comparer l'aire du domaine colorié avec celle du domaine délimité par l'ellipse d'équation réduite : $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1$.

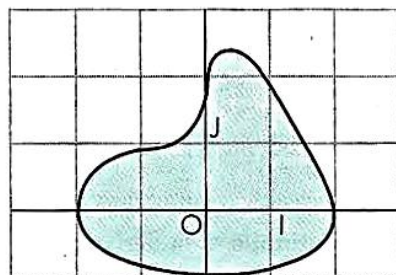
3. Sur la figure ci-après on a représenté les fonctions :

$$x \mapsto \sqrt{1 - (x+1)^2}, \quad x \in [-2; -1]$$

$$x \mapsto 2 - \sqrt{1 - (x+1)^2}, \quad x \in [-1; 0]$$

$$x \mapsto 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \sqrt{1 - (x-1)^2}, \quad x \in [0; 2]$$

$$x \mapsto -\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}, \quad x \in [-2; 2].$$



Déterminer l'aire, en unités d'aire, du domaine colorié.

46 Calcul de $\int_0^1 \sqrt{x^2 + 3} \, dx$

Le repère (O, I, J) est orthonormé.

Soit la fonction $f: x \mapsto 1 - x + \sqrt{x^2 + 3}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

1. a) Étudier f et tracer $(\mathcal{C})$.

b) En déduire que f admet une fonction réciproque, dont on précisera l'ensemble de définition D .

2. a) Tracer, sur le même graphique que $(\mathcal{C})$, la courbe représentative de f^{-1} .

b) Démontrer que : $\forall x \in D, f^{-1}(x) = \frac{3 - (x-1)^2}{2(x-1)}$.

3. a) Calculer : $\int_2^{1+\sqrt{3}} f^{-1}(x) \, dx$.

b) En déduire $\int_0^1 f(x) \, dx$, puis $\int_0^1 \sqrt{x^2 + 3} \, dx$.

47 Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}.$$

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], \frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{b \cos x}{1 + \sin x}.$$

En déduire la valeur de I_0 .

2. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 2n I_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}.$$

(On pourra écrire I_n sous la forme :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^{2n-1} x} \frac{1}{\cos^2 x} \, dx.)$$

48 Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x} \, dx.$$

1. Calculer I_0 et I_1 . (Pour I_0 , on pourra procéder comme dans l'exercice précédent.)

2. Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n x \cos x \, dx$.

3. En déduire l'expression de $I_{n+2} - I_n$ en fonction de n , puis la valeur de I_2, I_3, I_4 et I_5 .

49 Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin^2 x} \, dx.$$

1. Calculer I_0, I_1 et I_2 . (Pour I_0 , on pourra utiliser le changement de variable : $t = \frac{\pi}{2} - x$.)

2. Démontrer que la suite (I_n) est positive et décroissante. Est-elle convergente ?

3. a) Démontrer que pour tout x élément de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ et tout entier naturel n non nul, on a :

$$0 \leq \frac{\cos^n x}{\sin^2 x} \leq 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n.$$

b) En déduire la limite de la suite (I_n) .

50 Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} \, dx.$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} .

2. Calculer I_0 .

3. En déduire I_n .

51 Un encadrement de π

Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $I_n = \int_0^{\pi} \sin^n x \, dx$.

1. Calculer I_0 et I_1 .

2. Sans calculer I_n , démontrer que la suite (I_n) est décroissante.

3. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

4. a) Calculer I_9, I_{10} et I_{11} .

b) En déduire que : $\frac{2^{17}}{3^4 \times 7^2 \times 11} \leq \pi \leq \frac{2^{16}}{3^4 \times 5 \times 7^2}$.

52 Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx.$$

1. Démontrer que la suite (I_n) est positive et décroissante.

2. a) Pour tout entier naturel n , déterminer la dérivée de la fonction $x \mapsto \tan^{n+1} x$.

b) En déduire que :

$$\bullet \forall n \in \mathbb{N}^*, I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1} \quad (1);$$

$$\bullet \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1};$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

c) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = I_{n+4} - I_n$.

Utiliser (1) pour démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1}.$$

3. a) Calculer I_2 .

b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,$

$$f(2) + f(6) + f(10) + \dots + f(4n-2) = I_{4n+2} - I_2.$$

c) En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots - \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n+1}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

4. a) Calculer I_1 .

b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,$

$$f(1) + f(5) + f(9) + \dots + f(4n-3) = I_{4n+1} - I_1.$$

c) En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) = \ln 2.$$

53 Soit la fonction $F: x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}} \, dt$.

1. Justifier que l'ensemble de définition de la fonction F est $]0; +\infty[$.

2. Utiliser les propriétés de comparaison des intégrales pour étudier le signe de la fonction F .

3. a) Étudier la dérivabilité de F sur son ensemble de définition puis déterminer sa fonction dérivée.

b) En déduire le sens de variation de F et retrouver ainsi son signe.

54 On rappelle que : $\forall x \in]0; +\infty[, \ln x \leq x - 1$.

A - Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{x - \ln x}, & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.

2. Étudier f et tracer $(\mathcal{C})$. (On construira la demi-tangente en O et la tangente au point d'abscisse 1.)



B – On se propose d'étudier la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt.$$

1. a) Justifier que F est définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$.

b) Étudier le sens de variation de F .

2. Déterminer le signe de F .

Donner une interprétation graphique de ce résultat.

3. a) Démontrer que : $\forall t \in [0 ; 1], f(t) \leq t$.

b) En déduire que :

$$\bullet \forall x \in [0 ; 1], \frac{x^2 - 1}{2} \leq F(x) \leq 0 ;$$

$$\bullet -\frac{1}{2} \leq F(0) \leq 0.$$

(On ne demande pas la valeur exacte de $F(0)$.)

4. a) Démontrer que : $\forall t \in [1 ; +\infty[, 1 \leq f(t)$.

b) En déduire que :

$$\bullet \forall x \in [1 ; +\infty[, x - 1 \leq F(x) ;$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty.$$

5. a) Démontrer que :

$$\forall t \in [1 ; +\infty[, 1 + \frac{\ln t}{t} \leq f(t) \leq 1 + \ln t.$$

b) En déduire que :

$$\forall x \in [1 ; +\infty[, x + \frac{\ln(x)^2}{2} - 1 \leq F(x) \leq x \ln x.$$

c) Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de $F(2)$, $F(3)$, $F(4)$ et $F(5)$.

(On prendra la moyenne arithmétique des valeurs qui encadrent chacun de ces nombres.)

55 Irrationalité de e

1. a) Démontrer que :

$$\forall x \in [0 ; 1], 1 + x \leq e^x \leq 1 + x + x.$$

(On pourra étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto e^x - 1 - 2x$ et on admettra que $e < 3$.)

b) Déduire de la question précédente que :

$$\forall x \in [0 ; 1], 1 + x + \frac{x^2}{2} \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}.$$

c) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$\forall x \in [0 ; 1], \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \leq e^x \leq \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right) + \frac{x^n}{n!}.$$

2. On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de termes

$$\text{généraux : } u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq e \leq v_n$.

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, e - \frac{1}{n!} \leq u_n \leq e \text{ et } e \leq v_n \leq e + \frac{1}{n!}.$$

c) Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent toutes deux vers e .

d) Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont monotones.

3. L'objectif de cette partie est de démontrer que le nombre e est irrationnel.

Soit q un nombre entier naturel non nul.

On pose : $p = q e$.

a) Démontrer que : $q! u_q \leq p (q-1)! \leq q! u_q + 1$.

b) Démontrer que : $q! u_q \in \mathbb{N}$.

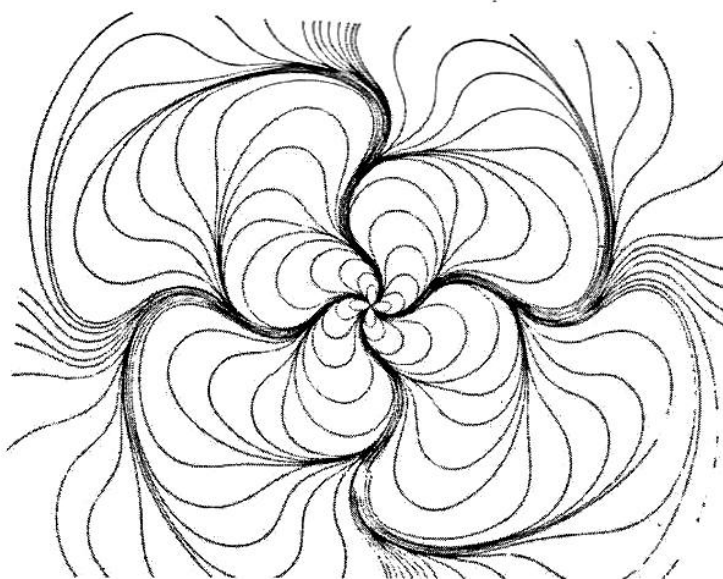
c) Démontrer que p n'est pas un nombre entier.

d) Conclure.

Équations différentielles

Introduction

Ce chapitre traite des équations différentielles du premier ordre et du deuxième ordre à coefficients constants, sans second membre. Il permet de démontrer certains résultats de physique que l'élève a appris à utiliser. Son champ d'application s'étend également à la géométrie, la démographie, la chimie et la biologie.



© Palais de la Découverte.

Famille de solutions d'une équation différentielle du premier degré.

SOMMAIRE

1. Généralités	322
2. Équations du type $y' - ay = 0$	324
3. Équations du type $y'' + ay' + by = 0$	326

1 Généralités

1.1. Notion d'équation différentielle

- Soit les fonctions $f: x \mapsto e^{4x}$ et $g: x \mapsto \sin 5x$.
- Calculer la dérivée f' de f et démontrer que, pour tout nombre réel x , on a :

$$f''(x) - 4f(x) = 0.$$
- Calculer la dérivée seconde g'' de g et démontrer que, pour tout nombre réel x , on a :

$$g''(x) + 25g(x) = 0.$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Elle est liée à sa dérivée f' par la relation : $f' - 4f = 0$.

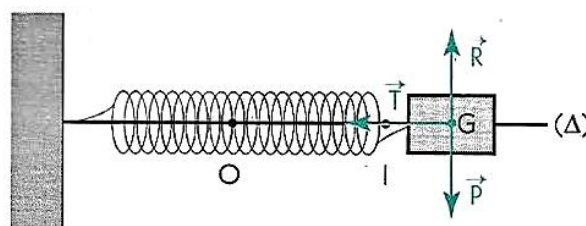
On dit que f est solution de l'équation différentielle : $y' - 4y = 0$.

De même la fonction g est solution de l'équation différentielle : $y'' + 25y = 0$.

• Oscillateur mécanique libre

Sur la figure ci-contre, le solide S de centre d'inertie G est soumis à trois forces :

- son poids $\vec{P}$,
- la réaction $\vec{R}$ de la tige sur laquelle il coulisse,
- la tension $\vec{T}$ du ressort.



D'après le théorème du centre d'inertie on a : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{\gamma}(t)$, où m désigne la masse de S et $\vec{\gamma}(t)$ son vecteur accélération à l'instant t .

Or : $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$; donc : $\vec{T} = m\vec{\gamma}(t)$.

Désignons par $x(t)$ la position de G dans le repère (O, I) à l'instant t ; on a : $\vec{\gamma}(t) = x''(t)\vec{OI}$.

La tension du ressort à l'instant t est donnée par la formule $\vec{T} = -kx(t)\vec{OI}$, où k est la constante de raideur du ressort. On a : $-kx(t) = mx''(t)$.

On en déduit que le mouvement de l'oscillateur est solution de l'équation différentielle : $x'' + \frac{k}{m}x = 0$.

Vocabulaire et notation

• Une relation entre une fonction inconnue et ses dérivées successives est appelée **équation différentielle**. La fonction inconnue est souvent notée y et ses dérivées successives y' , y'' , y''' , ...

• Une équation différentielle est dite **d'ordre n** lorsque le plus grand ordre des dérivées intervenant dans cette équation est n .

Ainsi, $2y'' - y' - y = 0$ est une équation différentielle d'ordre 2.

• Toute fonction vérifiant une équation différentielle sur un intervalle ouvert K est appelée **solution sur K** de cette équation différentielle.

Ainsi, la fonction $x \mapsto e^x$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $2y'' - y' - y = 0$.

• **Résoudre (ou intégrer)** une équation différentielle sur un intervalle ouvert K c'est déterminer l'ensemble des solutions sur K de cette équation différentielle.

• La courbe représentative d'une solution d'une équation différentielle est appelée **courbe intégrale** de cette équation différentielle.

1.2. Équations de types $y' = f(x)$ et $y'' = g(x)$

Équations du type $y' = f(x)$

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_1) : $y' = -6x^2$.

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto -6x^2$ est la fonction : $x \mapsto -2x^3$.

Donc, les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_1) sont les fonctions : $x \mapsto -2x^3 + c$ ($c \in \mathbb{R}$).

2. Résoudre sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ l'équation différentielle $(E_2) : y' = 1 + \tan^2 x$.

Déterminer la solution de (E_2) vérifiant : $y(0) = 1$.

Une primitive sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ de la fonction $x \mapsto 1 + \tan^2 x$ est la fonction : $x \mapsto \tan x$.

Donc, les solutions sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ de (E_2) sont les fonctions : $x \mapsto \tan x + c$ ($c \in \mathbb{R}$).

$y(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$; donc la solution sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ de (E_2) vérifiant $y(0) = 1$ est la fonction : $x \mapsto \tan x + 1$.

Équations du type $y'' = g(x)$

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E_1) : y'' = \sin x$.

On a : $(E_1) \Leftrightarrow y' = -\cos x + c_1$ ($c_1 \in \mathbb{R}$)

$$\Leftrightarrow y = -\sin x + c_1 x + c_2 \quad (c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Donc, les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_1) sont les fonctions : $x \mapsto -\sin x + c_1 x + c_2$ ($c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}$).

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E_2) : y'' = e^{-3x}$.

Déterminer la solution de (E_2) vérifiant : $y(0) = \frac{10}{9}$ et $y'(0) = \frac{5}{3}$.

On a : $(E_2) \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{3}e^{-3x} + c_1$ ($c_1 \in \mathbb{R}$)

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{9}e^{-3x} + c_1 x + c_2 \quad (c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Donc, les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_2) sont les fonctions : $x \mapsto -\frac{1}{9}e^{-3x} + c_1 x + c_2$ ($c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}$).

$$\text{On a : } \begin{cases} y(0) = \frac{10}{9} \\ y'(0) = \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{9} + c_2 = \frac{10}{9} \\ -\frac{1}{3} + c_1 = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 1. \end{cases}$$

Donc, la solution sur $\mathbb{R}$ de (E_2) vérifiant $y(0) = \frac{10}{9}$ et $y'(0) = \frac{5}{3}$ est la fonction : $x \mapsto \frac{1}{9}e^{-3x} + 2x + 1$.

Exercices

1.a Résoudre sur l'intervalle K les équations différentielles suivantes.

a) $xy' + 1 = 0$, $K =]0; +\infty[$

b) $x^3 y' + x^2 + 1 = 0$, $K =]-\infty; 0[$

c) $e^x y' + e^{-x} = 0$, $K = \mathbb{R}$

d) $y' \sin x - \cos x = 0$, $K =]0; \pi[$.

1.b Dans chacun des cas suivants, résoudre sur l'intervalle K l'équation différentielle et déterminer la solution vérifiant la condition initiale donnée.

a) $y'\sqrt{x} = 1 + x$, $K =]0; +\infty[$ et $y(1) = 2$

b) $y' \tan 2x + 1 = 0$, $K =]0; \frac{\pi}{4}[$ et $y(\frac{\pi}{6}) = 0$

c) $2y'e^{-x} = e^{x-1} + e^{x+1}$, $K = \mathbb{R}$ et $y(0) = e$

d) $xy' - \ln x = 0$, $K =]0; +\infty[$ et $y(e) = -1$.

1.c Résoudre sur l'intervalle K les équations différentielles suivantes.

a) $1 + 6x^2 + y'' = 0$, $K = \mathbb{R}$

b) $\cos 2x + 4y'' = 0$, $K = \mathbb{R}$

c) $2y'' + e^{2x} - e^{-2x} = 0$, $K = \mathbb{R}$

d) $2y'' = 1 + \tan^2 x$, $K =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

1.d Dans chacun des cas suivants, résoudre sur l'intervalle K l'équation différentielle et déterminer la solution vérifiant les conditions initiales données.

a) $y'' = 1 + \tan^2 x$, $K =]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$
et $y(0) = y'(0) = 1$

b) $y'' = (x+1)e^x$, $K = \mathbb{R}$ et $y(0) = y'(0) = e$.

2

Équations du type $y' - ay = 0$

Toute équation $y' - ay = 0$, où a est un nombre réel, est appelée **équation différentielle linéaire du premier ordre, à coefficients constants, sans second membre**.

L'expression « sans second membre » est un abus de langage qui signifie que le second membre est nul.

2.1. Résolution

Solution générale

On se propose de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y' - ay = 0$ ($a \in \mathbb{R}^*$).

• La fonction nulle est solution de (E).

Soit y une solution de (E) ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } y' - ay = 0 &\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = a \\ &\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \ln|y| = ax + c \\ &\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, |y| = e^{ce^{ax}}. \end{aligned}$$

La fonction y est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$; donc elle est de signe constant.

On en déduit que : $\exists k \in \mathbb{R}^*, y = k e^{ax}$.

Ainsi, en ajoutant la fonction nulle, les fonctions $x \mapsto k e^{ax}$ ($k \in \mathbb{R}$) sont solutions de (E).

• Démontrons que toute solution de (E) est de cette forme.

Soit y une solution de (E) et z la fonction : $x \mapsto y(x)e^{-ax}$.

La fonction z est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction z' : $x \mapsto [y'(x) - ay(x)]e^{-ax}$.

Or : $y' - ay = 0$; donc z' est la fonction nulle et z est une fonction constante.

Donc, il existe un nombre réel k tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, y(x)e^{-ax} = k$.

C'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = k e^{ax}$.

Donc, toute solution de (E) est de la forme : $x \mapsto k e^{ax}$ ($k \in \mathbb{R}$).

De cette étude, on déduit la propriété suivante.

Propriété

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - ay = 0$ ($a \in \mathbb{R}$) sont les fonctions : $x \mapsto k e^{ax}$ ($k \in \mathbb{R}$).

Exemples

- Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - y = 0$ sont les fonctions : $x \mapsto k e^x$ ($k \in \mathbb{R}$).
- Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ sont les fonctions : $x \mapsto k e^{-2x}$ ($k \in \mathbb{R}$).

Solution vérifiant une condition initiale

Reprenons l'équation différentielle (E) : $y' - ay = 0$ ($a \in \mathbb{R}$).

Soit x_0 et y_0 deux nombres réels.

On se propose de déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) vérifiant la condition initiale : $y(x_0) = y_0$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } y(x_0) = y_0 &\Leftrightarrow k e^{ax_0} = y_0 \\ &\Leftrightarrow k = y_0 e^{-ax_0}. \end{aligned}$$

Donc la fonction $x \mapsto y_0 e^{a(x-x_0)}$ est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de (E) vérifiant : $y(x_0) = y_0$.

On en déduit la propriété suivante.

Propriété

Pour tout couple $(x_0 ; y_0)$ de nombres réels, l'équation différentielle $y' - ay = 0$ ($a \in \mathbb{R}$) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur y_0 en x_0 .

Exemple

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + \frac{1}{2}y = 0$ sont les fonctions : $x \mapsto ke^{-\frac{1}{2}x}$ ($k \in \mathbb{R}$). Déterminer parmi ces solutions celle qui prend la valeur 1 en $\ln 4$.

On a : $1 = ke^{-\frac{1}{2}\ln 4} \Leftrightarrow k = 2$.

Donc la fonction $x \mapsto 2e^{-\frac{1}{2}x}$ est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $y(\ln 4) = 1$.

Graphiquement, cela signifie que de toutes les courbes intégrales de l'équation différentielle $y' + \frac{1}{2}y = 0$, une seule passe par le point $M_0\left(\ln 4, 1\right)$.

2. 2. Applications

Évolution d'une population

La population du Bénin était de 4,75 millions d'habitants en 1990 et de 5,5 millions d'habitants en 1995. On désigne par $h(t)$ le nombre de millions d'habitants à l'instant t . On suppose que la vitesse d'accroissement de la population est proportionnelle au nombre d'habitants. Déterminer, dans ces conditions, en quelle année la population du Bénin atteindra 10 millions d'habitants ? 20 millions d'habitants ?

Solution

• La vitesse d'accroissement de la population est la fonction dérivée de h . Par hypothèse, on a : $h' = ah$ ($a \in \mathbb{R}$) ; donc, h est de la forme : $t \mapsto ke^{at}$ ($k \in \mathbb{R}$).

De plus : $h(1990) = 4,75 \Leftrightarrow 4,75 = ke^{1990a}$
 $h(1995) = 5,5 \Leftrightarrow 5,5 = ke^{1995a}$.

On en déduit que : $\frac{5,5}{4,75} = \frac{ke^{1995a}}{ke^{1990a}} = e^{5a}$; donc : $a = \frac{1}{5} \ln \frac{22}{19}$.

h est la solution de l'équation différentielle $y' - ay = 0$ ($a = \frac{1}{5} \ln \frac{22}{19}$) vérifiant : $h(1990) = 4,75$;

h est donc la fonction : $t \mapsto 4,75e^{a(t-1990)}$, où $a = \frac{1}{5} \ln \frac{22}{19}$.

• Déterminons l'année où la population du Bénin atteindra 10 millions d'habitants.

On a : $10 = 4,75e^{a(t-1990)} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{10}{4,75}\right) = a(t-1990)$.

On en déduit que : $25,39 \approx t - 1990$; d'où : $t \approx 2015,39$.

La population du Bénin atteindra 10 millions d'habitants en l'an 2015.

Pour 20 millions d'habitants, on trouve : $t \approx 2039,03$.

La population du Bénin atteindra 20 millions d'habitants en l'an 2039.

Décharge d'un condensateur dans un circuit RC

Un condensateur de capacité C tel que $C = 200 \mu\text{F}$ se décharge à travers un conducteur ohmique de résistance $R = 1 \text{ k}\Omega$.

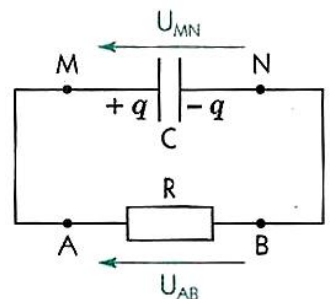
On admet qu'à tout instant t , la charge q du condensateur vérifie l'équation différentielle : $q' + \frac{1}{RC}q = 0$, où R est exprimée en ohm (Ω) et C en Farad (F).

1. Donner l'expression de $q(t)$ sachant que la charge initiale du condensateur est q_0 .

2. On considère que le condensateur est déchargé lorsque la charge est égale à 1 % de la charge initiale.

a) Calculer le temps mis par le condensateur pour se décharger.

b) Quelle valeur doit prendre la résistance pour que le temps de décharge soit de 10^{-3} seconde ?



Solution

1. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $q' + \frac{1}{RC}q = 0$ sont les fonctions : $t \mapsto ke^{-\frac{1}{RC}t}$ ($k \in \mathbb{R}$).

Or : $q(0) = q_0$; donc : $q(t) = q_0e^{-\frac{1}{RC}t}$.

2. a) On a : $q(t) = \frac{1}{100} q_0 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{RC}t} = 10^{-2}$
 $\Leftrightarrow t = 2 RC \ln 10.$

Or : $R = 10^3$ et $C = 200 \times 10^{-6}$; donc : $t \approx 0,92$ s.

b) On a de même : $e^{-\frac{1}{RC}t} = 10^{-2} \Leftrightarrow R = \frac{t}{2C \ln 10}.$

On en déduit que : $R \approx 1,09 \Omega.$

Exercices

2.a Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

a) $y = y'$ b) $y' + 2y = 0$
c) $y' = -\frac{y}{2}$ d) $y'\sqrt{2} - y\sqrt{3} = 0.$

2.b Dans chacun des cas suivants, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle et déterminer la solution vérifiant la condition initiale donnée.

a) $y' - 3y = 0$ et $y(0) = 1$
b) $y' + 3y = 0$ et $y(1) = 1$
c) $4y' - 3y = 0$ et $y(-4) = 1$
d) $y' + y \ln 2 = 0$ et $y(1) = -2.$

2.c 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' = 0.$$

2. Déterminer la solution vérifiant :

$$y(0) = y'(0) = 1.$$

2.d Dans une culture de microbes qui se développent, la vitesse d'accroissement à l'instant t est proportionnelle à la quantité de microbes à cet instant. Sachant qu'il y a 10^5 microbes au bout de 2 heures et 5×10^5 microbes au bout de 6 heures, combien y avait-il initialement de microbes dans cette culture ?

3 Équations du type $y'' + ay' + by = 0$

Toute équation $y'' + ay' + by = 0$, où a et b sont deux nombres réels, est appelée **équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, sans second membre**.

Nous démontrerons au paragraphe 3.2. que la solution d'une telle équation peut se ramener à celle d'une équation du type : $y'' + \lambda y = 0$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).

3.1. Équations du type $y'' + \lambda y = 0$

Lorsque $\lambda = 0$, on a : $y'' = 0$; les solutions sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle sont les fonctions : $x \mapsto Ax + B$ ($A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$).

Lorsque $\lambda \neq 0$, on distingue deux cas : $\lambda < 0$ et $\lambda > 0$.

Équations du type $y'' - \omega^2 y = 0$

On se propose de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_1) : $y'' - \omega^2 y = 0$ ($\omega \in \mathbb{R}^*$).

• Vérifier que, pour tous nombres réels A et B , la fonction $x \mapsto Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$ est solution de (E_1) .

Démontrons que toute solution de (E_1) est de cette forme.

Soit y une solution de (E_1) et z la fonction : $x \mapsto y(x)e^{-\omega x}$.

• Démontrer que : $z'' + 2\omega z' = 0$.

• En déduire que z' est de la forme : $x \mapsto k e^{-2\omega x}$ ($k \in \mathbb{R}$).

• Déterminer z et établir que y est de la forme : $x \mapsto Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$ ($A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$).

De cette étude, on déduit la propriété suivante.

Propriété

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' - \omega^2 y = 0$ ($\omega \in \mathbb{R}^*$) sont les fonctions :

$$x \mapsto Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x} \quad (A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}).$$

Exemple

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' - 4y = 0$ sont les fonctions :

$$x \mapsto Ae^{2x} + Be^{-2x} \quad (A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}).$$

Équations du type $y'' + \omega^2 y = 0$

On se propose de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_2) : $y'' + \omega^2 y = 0$ ($\omega \in \mathbb{R}^*$).

- Vérifier que, pour tous nombres réels A et B , la fonction $x \mapsto A \cos \omega x + B \sin \omega x$ est solution de (E_2) . Démontrons que toute solution de (E_2) est de cette forme.
- Soit y une solution de (E_2) et z la fonction : $x \mapsto y(x) - y(0) \cos \omega x - \frac{1}{\omega} y'(0) \sin \omega x$.
- Démontrer que z est solution de (E_2) .
- Démontrer que $\omega^2 z^2 + z'^2$ est une fonction constante. (On pourra dériver cette fonction.)
- Démontrer que : $z(0) = 0$ et $z'(0) = 0$.
- En déduire que z est la fonction nulle et établir que y est de la forme :

$$x \mapsto A \cos \omega x + B \sin \omega x \quad (A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}).$$

De cette étude, on déduit la propriété suivante.

Propriété

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ ($\omega \in \mathbb{R}^*$) sont les fonctions :
 $x \mapsto A \cos \omega x + B \sin \omega x \quad (A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}).$

Exemple

Nous avons établi (§1.1.) que l'équation différentielle du mouvement d'un oscillateur mécanique libre est : $x'' + \frac{k}{m}x = 0$.

Les solutions de cette équation sont les fonctions : $t \mapsto A \cos t \sqrt{\frac{k}{m}} + B \sin t \sqrt{\frac{k}{m}}$ ($A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$).

On pose : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (pulsation propre de l'oscillateur).

L'équation horaire du mouvement est de la forme : $x(t) = X_{\max} \cos(\omega_0 t + \phi)$, où $X_{\max}$ est l'amplitude du mouvement et la phase ϕ à l'origine.

3.2. Équations du type $y'' + ay' + by = 0$

Équation caractéristique

Considérons l'équation différentielle : $y'' + ay' + by = 0$ ($a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$).

Soit r un nombre réel et y la fonction : $x \mapsto e^{rx}$.

On a : $y' = ry$ et $y'' = r^2 y$.

On en déduit que : $y'' + ay' + by = y(r^2 + ar + b)$.

Donc, y est solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ si et seulement si : $r^2 + ar + b = 0$.

Définition

On appelle équation caractéristique de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ ($a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$) l'équation d'inconnue r : $r^2 + ar + b = 0$.

Exemples

- L'équation différentielle $y'' - 2y' + 5y = 0$ a pour équation caractéristique : $r^2 - 2r + 5 = 0$.
- L'équation différentielle $y'' - 25y = 0$ a pour équation caractéristique : $r^2 - 25 = 0$.

Remarque

L'équation caractéristique de $y' - ay = 0$ ($a \in \mathbb{R}$) est l'équation d'inconnue r : $r - a = 0$.

Résolution de l'équation $y'' + ay' + by = 0$

Soit (E_1) l'équation différentielle : $y'' + ay' + by = 0$ ($a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$).

- Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et z la fonction : $x \mapsto y(x)e^{\frac{a}{2}x}$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = z(x)e^{-\frac{a}{2}x}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = e^{-\frac{a}{2}x} \left[z'(x) - \frac{a}{2} z(x) \right],$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) = e^{-\frac{a}{2}x} \left[z''(x) - az'(x) + \frac{a^2}{4} z(x) \right].$$

On en déduit que : $y'' + ay' + by = 0 \Leftrightarrow z'' + \left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + b\right)z = 0$
 $\Leftrightarrow z'' - \frac{a^2 - 4b}{4}z = 0 \quad (E_2).$

• Posons : $\Delta = a^2 - 4b$; Δ est le discriminant de l'équation caractéristique de (E_1) .
 On distingue trois cas.

1^{er} cas : $\Delta = 0$

Les solutions de (E_2) sont les fonctions : $x \mapsto Ax + B$ ($A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$).

Donc, les solutions de (E_1) sont les fonctions : $x \mapsto (Ax + B)e^{-\frac{a}{2}x}$ ($A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$) ; c'est-à-dire les fonctions : $x \mapsto (Ax + B)e^{rx}$ ($A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$), où r est la solution double de l'équation caractéristique de (E_1) .

2^e cas : $\Delta > 0$

Les solutions de (E_2) sont les fonctions : $x \mapsto Ae^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2}x} + Be^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}x}$ ($A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$).

Donc, les solutions de (E_1) sont les fonctions : $x \mapsto Ae^{(-\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2})x} + Be^{(-\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2})x}$ ($A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$) ; c'est-à-dire les fonctions : $x \mapsto Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$ ($A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$), où r_1 et r_2 sont les solutions réelles de l'équation caractéristique de (E_1) .

3^e cas : $\Delta < 0$

Les solutions de (E_2) sont les fonctions : $x \mapsto A\cos\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x$ ($A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$).

Donc, les solutions de (E_1) sont les fonctions : $x \mapsto e^{-\frac{a}{2}x}\left(A\cos\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x\right)$ ($A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$) ; c'est-à-dire les fonctions : $x \mapsto e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$ ($A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$), où $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ sont les solutions complexes de l'équation caractéristique de (E_1) .

M

Pour résoudre sur $\mathbb{R}$ une équation différentielle du type $y'' + ay' + by = 0$ ($a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$) on peut résoudre l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ et utiliser le tableau suivant :

$\Delta = a^2 - 4b$	Solutions de l'équation caractéristique	Solutions de l'équation différentielle
$\Delta = 0$	une solution double : r	$x \mapsto (Ax + B)e^{rx}$ ($A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$)
$\Delta > 0$	deux solutions réelles : r_1 et r_2	$x \mapsto Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$ ($A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$)
$\Delta < 0$	deux solutions complexes conjuguées : $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$	$x \mapsto e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$ ($A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$)

Remarque

Cette méthode permet de retrouver les solutions des équations différentielles $y'' - \omega^2 y = 0$ et $y'' + \omega^2 y = 0$ ($\omega \in \mathbb{R}^*$).

Exemples

• Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_1) : $y'' - 8y' + 16y = 0$.

L'équation caractéristique $r^2 - 8r + 16 = 0$ a une solution réelle double : 4.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_1) sont les fonctions : $x \mapsto (Ax + B)e^{4x}$ ($A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$).

• Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_2) : $y'' + 3y' - 10y = 0$.

L'équation caractéristique $r^2 + 3r - 10 = 0$ a deux solutions réelles : -5 et 2.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_2) sont les fonctions : $x \mapsto Ae^{-5x} + Be^{2x}$ ($A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$).

• Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_3) : $y'' - 4y' + 13y = 0$.

L'équation caractéristique $r^2 - 4r + 13 = 0$ a deux solutions complexes conjuguées : $2 - 3i$ et $2 + 3i$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_3) sont les fonctions : $x \mapsto e^{2x}(A\cos 3x + B\sin 3x)$ ($A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$).

Solution vérifiant une condition initiale

On admet la propriété suivante.

Propriété

Pour tout triplet $(x_0; y_0; z_0)$ de nombres réels, l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, telle que : $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = z_0$.

Exemples

- Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 4y' + 7y = 0$ sont les fonctions :
 $x \mapsto e^{-2x}(A \cos \sqrt{3}x + B \sin \sqrt{3}x)$ ($A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$).

Déterminons celle qui vérifie : $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

$$\text{On a : } \begin{cases} A = 0 \\ -2A + B\sqrt{3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

La solution cherchée est la fonction : $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-2x} \sin \sqrt{3}x$.

- Déterminer la solution de l'équation différentielle $x'' + \frac{k}{m}x = 0$ vérifiant les conditions initiales : $x(0) = x_0$ et $x'(0) = 0$.

Les solutions de cette équation sont les fonctions : $t \mapsto A \cos t \sqrt{\frac{k}{m}} + B \sin t \sqrt{\frac{k}{m}}$ ($A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$).

$$\text{On a : } \begin{cases} x(0) = x_0 \\ x'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = x_0 \\ B \sqrt{\frac{k}{m}} = 0 \end{cases}$$

La solution cherchée est la fonction : $t \mapsto x_0 \cos t \sqrt{\frac{k}{m}}$.

3.3. Travaux dirigés

1. Équation différentielle avec second membre

1°) Soit à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_1) : $y' + 2y = 2 \cos x$.

a) Déterminer deux nombres réels p et q tels que la fonction $g : x \mapsto p \cos x + q \sin x$ soit solution de (E_1) .

b) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que $f + g$ est solution de (E_1) si et seulement si f est solution de l'équation différentielle (E_2) : $y' + 2y = 0$.

c) Résoudre (E_2) et en déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_1) .

2°) Soit à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' - 2y' + 5y = e^{-2x}$.

a) Déterminer un nombre réel m tel que la fonction $g : x \mapsto m e^{-2x}$ soit solution de cette équation.

b) Utiliser une méthode analogue à celle utilisée dans la question 1°) pour résoudre l'équation proposée.

Solution

$$1^\circ) a) g \text{ solution de } (E_1) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (-p \sin x + q \cos x) + 2(p \cos x + q \sin x) = 2 \cos x$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (2p + q) \cos x + (-p + 2q) \sin x = 2 \cos x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2p + q = 2 \\ -p + 2q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \frac{4}{5} \\ q = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$b) \text{ On a : } f + g \text{ solution de } (E_1) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + g'(x) + 2f(x) + 2g(x) = 2 \cos x$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + 2f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow f \text{ solution de } (E_2).$$

c) Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_2) sont les fonctions : $x \mapsto k e^{-2x}$ ($k \in \mathbb{R}$).

Donc, les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_1) sont les fonctions : $x \mapsto k e^{-2x} + \frac{2}{5} (2 \cos x + \sin x)$ ($k \in \mathbb{R}$).

2°) Considérons l'équation différentielle (E'_1) : $y'' - 2y' + 5y = e^{-2x}$.

a) On a : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = -2m e^{-2x}$ et $g''(x) = 4m e^{-2x}$.

Donc : g solution de $(E'_1) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 13me^{-2x} = e^{-2x}$
 $\Leftrightarrow m = \frac{1}{13}.$

b) Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On procède comme à la question 1.b).

On obtient : $f + g$ solution de $(E'_1) \Leftrightarrow f$ solution de $(E'_2) : y'' - 2y' + 5y = 0.$

L'équation différentielle (E'_2) a pour équation caractéristique : $r^2 - 2r + 5 = 0.$

On a : $\Delta' = -4$; donc, cette équation a deux solutions complexes : $1 + 2i$ et $1 - 2i.$

On en déduit que les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E'_2) sont les fonctions :

$$x \mapsto e^x(A\cos 2x + B\sin 2x) \quad (A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}).$$

Donc, les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E'_1) sont les fonctions :

$$x \mapsto e^x(A\cos 2x + B\sin 2x) + \frac{1}{13}e^{-2x} \quad (A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}).$$

Cette méthode de résolution se généralise à toute équation différentielle linéaire avec second membre.

M

Pour résoudre une équation différentielle linéaire avec second membre, on peut utiliser le procédé suivant :

- déterminer une solution particulière g de cette équation ;
- démontrer que les solutions de l'équation différentielle avec second membre sont les fonctions du type $f + g$, où f est solution de l'équation différentielle sans second membre ;
- résoudre l'équation sans second membre et en déduire les solutions de l'équation avec second membre.

2. Oscillateur mécanique amorti

Un solide S de centre d'inertie G , de masse $m = 0,1$ kg, fixé à un ressort de raideur $k = 10$ N/m coulisse sur une tige horizontale. On désigne par $x(t)$ la position de G dans le repère (O, I) à l'instant t , O étant la position de G à l'équilibre.

On écarte S de sa position d'équilibre et on le lâche en lui donnant une vitesse initiale. L'unité de longueur est le mètre et l'unité de temps est la seconde ; on donne : $x(0) = 0,05$ et $x'(0) = -0,5$.

1°) On néglige les forces de frottement.

On dit que S est un oscillateur mécanique libre.

a) Démontrer que l'équation horaire du mouvement de G est de la forme : $x(t) = X_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi).$

Calculer $X_{\max}$, ω_0 , φ et la période T_0 du mouvement.

b) Calculer la position et la vitesse de S à l'instant $t = 5$.

c) Tracer la courbe représentative $(\%)$ de l'élongation du mouvement de G .

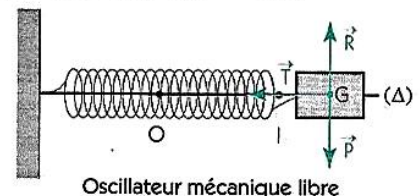
2°) Le mouvement de S est amorti par des frottements dont la force est proportionnelle à la vitesse du mobile, le coefficient de proportionnalité f de cette force étant tel que : $f^2 < 4mk$.

On dit que S est un oscillateur mécanique amorti.

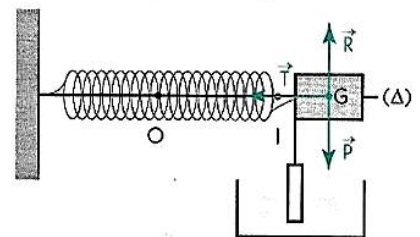
a) Justifier que l'équation différentielle du mouvement de l'oscillateur mécanique est alors : $x'' + \frac{f}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0.$

b) Démontrer que l'équation horaire du mouvement de G est de la forme : $x(t) = \lambda e^{\alpha t} \cos(\omega t + \varphi).$ Calculer λ , α , ω , φ et la pseudo-période T du mouvement, sachant que $f = 0,2$ N/ms⁻¹.

c) Tracer la courbe représentative (Γ) de l'élongation du mouvement de G .



Oscillateur mécanique libre



Oscillateur mécanique amorti

Solution

1°) a) L'équation différentielle du mouvement de l'oscillateur mécanique libre est : $x'' + \frac{k}{m}x = 0.$

Les solutions de cette équation sont les fonctions $x : t \mapsto A \cos t \sqrt{\frac{k}{m}} + B \sin t \sqrt{\frac{k}{m}}.$

On pose : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, X_{\max} = \sqrt{A^2 + B^2}, \cos \varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ et $\sin \varphi = -\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$

On obtient : $x(t) = \sqrt{A^2 + B^2} (\cos \omega_0 t \cos \varphi - \sin \omega_0 t \sin \varphi) = X_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi).$

On a : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$; donc : $\omega_0 = 10 \text{ rad.s}^{-1}$ et $T_0 \approx 0,628 \text{ s}$.

ω_0 est la pulsation propre et T_0 la période propre du mouvement.

On a : $x'(t) = -\omega_0 X_{\max} \sin(\omega_0 t + \varphi)$; de plus : $x(0) = 0,05$ et $x'(0) = -0,5$.

On en déduit que : $\begin{cases} X_{\max} \cos \varphi = 0,05 \\ X_{\max} \sin \varphi = 0,05 \end{cases}$; c'est-à-dire : $X_{\max} \approx 0,07$ et $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

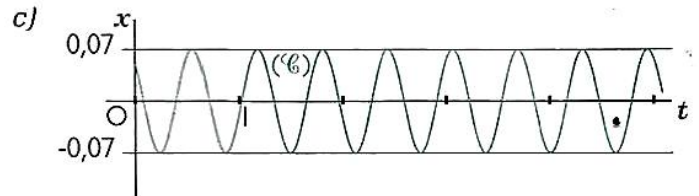
$X_{\max}$ est l'amplitude et φ la phase à l'origine du mouvement.

L'équation horaire du mouvement de G est :

$$x(t) = 0,07 \cos(10t + \frac{\pi}{4}).$$

b) À l'instant $t = 5$, on a : $x(5) \approx 0,061$

$$x'(5) \approx 0,351.$$



2°) a) On désigne par $\vec{F}$ la force de frottement ; on a : $\vec{F} = -f x'(t) \vec{OI}$.

D'après le théorème du centre d'inertie on a : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{F} = m \vec{\gamma}(t)$.

Or : $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$, $\vec{T} = -k x(t) \vec{OI}$ et $\vec{\gamma}(t) = x''(t) \vec{OI}$.

On en déduit que l'équation différentielle du mouvement de l'oscillateur mécanique amorti est :

$$x'' + \frac{f}{m} x' + \frac{k}{m} x = 0 \quad (E_1).$$

b) L'équation caractéristique de (E_1) est : $r^2 + \frac{f}{m} r + \frac{k}{m} = 0$.

On a : $\Delta = \frac{f^2 - 4mk}{m^2}$; donc : $\Delta < 0$.

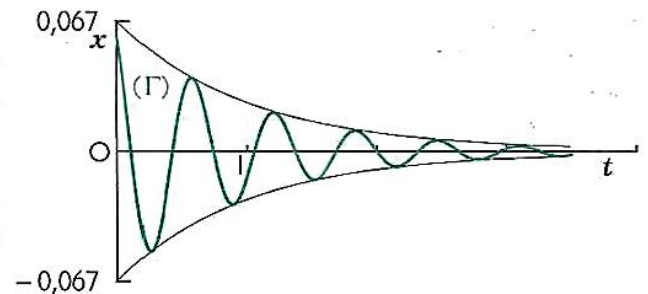
Les solutions de (E_1) sont les fonctions $x : t \mapsto e^{\alpha t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$, où $\alpha = -\frac{f}{2m}$ et $\omega = \frac{\sqrt{4mk - f^2}}{2m}$.

En procédant comme à la question 1.a), on obtient : $x(t) = \lambda e^{\alpha t} \cos(\omega_0 t + \varphi)$.

On a : $\alpha = -\frac{f}{2m}$, $\omega = \frac{\sqrt{4mk - f^2}}{2m}$ et $T = \frac{2\pi}{\omega}$; donc : $\alpha = -1$, $\omega \approx 9,95 \text{ rad.s}^{-1}$ et $T \approx 0,631 \text{ s}$.

De plus, on a : $x(0) = 0,05$ et $x'(0) = -0,5$; on en déduit que : $\varphi \approx 0,523 \text{ rad}$ et $\lambda \approx 0,067 \text{ m}$.

Le mouvement est dit pseudo-périodique, de pseudo-période T . En effet, on a : $x(t + T) = e^{\alpha T} x(t)$; donc, les amplitudes décroissent de façon périodique et forment une suite géométrique de raison $e^{\alpha T}$, appelée facteur d'amortissement.



c) La courbe (Γ) est une sinusoïde amortie, comprise entre les courbes représentatives des fonctions $t \mapsto \lambda e^{\alpha t}$ et $t \mapsto -\lambda e^{\alpha t}$.

Exercices

3.a Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

- a) $9y'' - 64y = 0$ b) $y'' - 2y = 0$
c) $9y'' + 4y = 0$ d) $2y'' + y = 0$.

3.b Dans chacun des cas suivants, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle et déterminer la solution vérifiant les conditions initiales données.

- a) $2y'' - y = 0$ et $y(0) = y'(0) = 1$
b) $9y'' + 4y = 0$ et $y(\pi) = y'(\pi) = 0$.

3.c Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

- a) $y'' + y' - 6y = 0$ b) $2y'' - 2\sqrt{2}y' + y = 0$
c) $y'' - 4y' + 8y = 0$ d) $9y'' + 6y' + y = 0$
e) $y'' + 4y' - 5y = 0$ f) $y'' - 6y' + 2y = 0$
g) $\frac{1}{3}y'' - 2y' + 9y = 0$ h) $4y'' + 4y' + y = 0$.

3.d Dans chacun des cas suivants, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle et déterminer la solution vérifiant les conditions initiales données.

- a) $y'' - 2y' - 2y = 0$, $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$
b) $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$
c) $y'' + 4y' + 5y = 0$, $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$.

Exercices

APPRENTISSAGE

Généralités

1 Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle K .

- a) $f(x) = \frac{x^2}{2} - x + 1$, (E) : $2(y + y') = x^2$ et $K = \mathbb{R}$
 b) $f(x) = (2x - 1)e^x$, (E) : $y' - y = 2e^x$ et $K = \mathbb{R}$
 c) $f(x) = (1 + x)^2$, (E) : $\frac{y'}{2y} = \frac{1}{1+x}$ et $K =]-1; +\infty[$
 d) $f(x) = \sqrt{2x}$, (E) : $yy' = 1$ et $K =]0; +\infty[$
 e) $f(x) = x \cos x$, (E) : $y - xy' = x^2 \sin x$ et $K = \mathbb{R}$
 f) $f(x) = x \ln x - x$, (E) : $xy' - y = x$ et $K =]0; +\infty[$.

2 Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle K .

- a) $f(x) = e^x + e^{2x}$, (E) : $y'' + y' - 2y = 4e^{2x}$ et $K = \mathbb{R}$
 b) $f(x) = e^{-x} + x$, (E) : $y''' + y'' = 0$ et $K = \mathbb{R}$
 c) $f(x) = \frac{2}{x}$, (E) : $y'' + \frac{2}{x}y' = 0$ et $K =]0; +\infty[$
 d) $f(x) = \tan x$, (E) : $y' - y^2 = 1$ et $K =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$
 e) $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$, (E) : $y'' + x(y')^2 = 0$ et $K =]-1; 1[$.

3 Soit l'équation différentielle (E) :

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0.$$

- Vérifier que les fonctions $x \mapsto e^{-x}$, $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{2x}$ sont solutions sur $\mathbb{R}$ de (E).
- Démontrer que, pour tous nombres réels a , b et c , la fonction $x \mapsto ae^{-x} + be^x + ce^{2x}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de (E).

4 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles $y' = e^x \sin x$ et $y' = e^x \cos x$.

2. En déduire la résolution sur $\mathbb{R}$ de chacune des équations différentielles suivantes.

- a) $y'' = e^x \sin x$ b) $y'' = e^x \cos x$.

5 Soit la fonction $f : x \mapsto x \sin x + \cos x$.

- Déterminer $f'(x)$ et $f''(x)$.
- En déduire une relation entre x , $f(x)$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
- Former une équation différentielle dont f est solution.

6 Le plan est muni du repère (O, I, J) .

Déterminer une équation différentielle dont les courbes intégrales $(\mathcal{C})$ sont telles qu'en tout point M de $(\mathcal{C})$, le coefficient directeur de la droite (OM) est le double du coefficient directeur de la tangente à $(\mathcal{C})$.

Équations du type $y' - ay = 0$

7 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

- a) $4y' + 3y = 0$ b) $y \ln 5 - y' = 0$
 c) $\frac{1}{5}y + \frac{1}{3}y' = 0$ d) $y\sqrt{3} = y'$.

8 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

- a) $9y^2 = (y')^2$ b) $(y')^2 - 2yy' = 0$
 c) $y'' = 3y$ d) $2y''' + 5y'' = 0$.

9 Dans chacun des cas suivants, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) et déterminer la solution vérifiant la condition initiale donnée.

- a) (E) : $y' - 3y = 0$ et $y(0) = 2$
 b) (E) : $3y' + y = 0$ et $y(1) = e$
 c) (E) : $y' + y \ln 2 = 0$ et $y(1) = 1$
 d) (E) : $y' = y$ et $y(1) = -1$.

10 Le plan est muni du repère (O, I, J) .

Dans chacun des cas suivants, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) et déterminer la solution dont la courbe représentative passe par le point A.

- a) (E) : $2y' + 3y = 0$ et $A\left(\frac{2}{1}\right)$
 b) (E) : $-y' = y$ et $A\left(\frac{2}{3}\right)$
 c) (E) : $2y' - \frac{1}{2}y = 0$ et $A\left(\frac{2}{2e}\right)$
 d) (E) : $y' - \pi y = 0$ et $A\left(\frac{2}{e^\pi}\right)$.

11 Le plan est muni du repère (O, I, J) .

Déterminer la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $2f' + f = 0$ et dont la courbe représentative admet en son point d'abscisse -2 une tangente de coefficient directeur $\frac{3}{5}$.

12 Le plan est muni du repère (O, I, J) .

Déterminer la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $2f' + 5f = 0$ et dont la courbe représentative admet en son point d'abscisse -1 une tangente parallèle à la droite d'équation : $y + x = 0$.

13 Soit θ la température d'un corps à l'instant t .

La température ambiante est 30°C . À chaque instant t , on pose : $x(t) = \theta(t) - 30$.

On suppose que la fonction x est dérivable sur $\mathbb{R}$ et quelle vérifie : $x' = -k^2x$ ($k \in \mathbb{R}^*$).

À l'instant 0 la température du corps est 70°C et au bout de 5 minutes elle n'est plus que 60°C .

- Déterminer $\theta(t)$, où t est mesuré en minutes.
- À quelle température sera le corps au bout de 20 minutes ?

14 Un réservoir contient 20 litres d'air (80% d'azote et 20% d'oxygène). Il reçoit 0,1 litre d'azote par seconde. La même quantité de mélange, supposé homogène, s'échappe du réservoir.

1. Exprimer le volume d'azote contenu dans le mélange, en fonction du temps.

2. Au bout de combien de temps le réservoir contiendra-t-il 99% d'azote ?

Équations du type $y'' + ay' + by = 0$

15 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

- a) $y'' - 4y = 0$ b) $y'' + 16y = 0$
 c) $2y'' - y' - 6y = 0$ d) $y'' - 4y' + 13y = 0$
 e) $y'' + 3y' = 0$ f) $y'' - 6y' + 9y = 0$.

16 Dans chacun des cas suivants, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) et déterminer la solution vérifiant les conditions initiales données.

- a) (E) : $y'' + 2y' + y = 0$, $y(0) = -1$ et $y'(0) = 0$
 b) (E) : $y'' + 16y = 0$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = -1$
 c) (E) : $y'' - (\ln 2)^2 y = 0$, $y(0) = 1$ et $y(2) = 1$
 d) (E) : $4y'' + y = 0$, $y(\frac{\pi}{3}) = 1$ et $y(\frac{\pi}{2}) = 1$
 e) (E) : $y'' + 2y' - 3y = 0$, $y(0) = 3$ et $y'(0) = -1$
 f) (E) : $y'' + y' + y = 0$, $y(0) = -1$ et $y'(0) = \sqrt{3}$.

17 Le plan est muni du repère (O, I, J). Déterminer la fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'' - \pi f = 0$ et dont la courbe représentative admet au point $A(\frac{0}{\pi})$ une tangente de coefficient directeur π .

18 Le plan est muni du repère (O, I, J). Déterminer la fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'' - f' + \frac{9}{4}f = 0$ et dont la courbe représentative est tangente en O à la droite d'équation : $y = 2x$.

19 Le plan est muni du repère (O, I, J).
 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) :
 $y'' - 3y' + 2y = 0$.
 2. Quelle est la solution de (E) dont la courbe représentative ($\mathcal{C}$) admet au point d'abscisse 0 la même tangente que la courbe ($\mathcal{C}'$) représentative de la fonction $x \mapsto e^{3x}$?

20 Le plan est muni du repère (O, I, J). Déterminer la fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $9f'' - 18f' + 10f = 0$ et dont la courbe représentative ($\mathcal{C}$) passe par les points $A(\frac{0}{3})$ et $B(\frac{\pi}{0})$.

21 Soit la fonction $f : x \mapsto \sin x + \cos x$.
 1. Déterminer $f'(x)$ et $f''(x)$.
 2. Former une équation différentielle du second ordre sans second membre dont f soit solution.
 3. Résoudre cette équation.

22 On considère l'équation différentielle (E) :
 $y' + 2y = e^{-2x}$.
 1. Vérifier que la fonction $g : x \mapsto (x+1)e^{-2x}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de (E).

2. Démontrer qu'une fonction $f + g$ est solution de (E) si et seulement si la fonction f est solution de l'équation différentielle : $y' + 2y = 0$.

3. En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E).

APPROFONDISSEMENT

23 Soit la fonction $f : x \mapsto (1+x)e^{-2x}$.

1. Déterminer les nombres réels a et b pour que f soit solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) :

$$y'' + ay' + by = 0.$$

2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, la dérivée d'ordre n de f est solution de (E).

3. Déterminer, parmi les primitives de f , celle qui est solution de (E).

24 Soit α un nombre réel tel que : $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(1 + \cos 2\alpha)y'' - 2y'\sin 2\alpha + 2y = 0.$$

25 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) :

$$y'' + 16y = 0.$$

2. Déterminer la solution f qui vérifie : $f(\frac{\pi}{4}) = -2$ et $f'(\pi) = 8$.

3. Résoudre dans $[0; \pi]$ l'équation : $f(x) = \sqrt{2}$.

26 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) :

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

2. Déterminer la solution f qui vérifie : $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$.

3. On pose : $F(x) = -\frac{1}{5} [f''(x) + 2f'(x)]$.

a) Démontrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$; expliciter $F(x)$.

b) En déduire le calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.

27 Le plan est muni du repère (O, I, J).

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) :

$$y' = \lambda y \quad (\lambda \in \mathbb{R}^*).$$

On note f_k la solution vérifiant $f(0) = k$ et ($\mathcal{C}_k$) sa courbe représentative.

2. Soit x_0 un nombre réel.

a) Déterminer une équation de la tangente à ($\mathcal{C}_k$) au point d'abscisse x_0 .

b) Démontrer que, lorsque k décrit $\mathbb{R}$, cette tangente passe par un point fixe dont on déterminera les coordonnées en fonction de λ et de x_0 .

28 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).

Soit λ un nombre réel non nul.

Déterminer une courbe

($\mathcal{C}$) passant par le point J

et telle qu'en tout point M

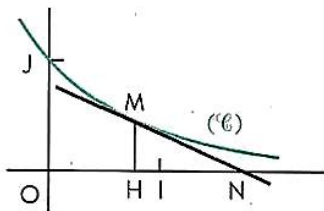
de ($\mathcal{C}$), dont le projeté

orthogonal sur (OI) est le

point H, la tangente

coupe (OI) en un point N

avec : $HN = \lambda$.



29 Le plan est muni du repère (O, I, J).

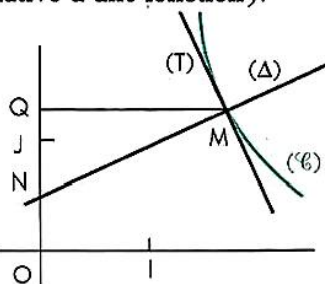
Déterminer une courbe ($\mathcal{C}$) passant par le point $A(-\frac{1}{1})$

et telle qu'en tout point M de ($\mathcal{C}$) la tangente ait un coefficient directeur proportionnel au carré de l'ordonnée de M.

30 Le plan est muni du repère (O, I, J) . Déterminer une courbe $(\mathcal{C})$ passant par le point $A\left(\frac{1}{2}\right)$ et telle qu'en tout point M de $(\mathcal{C})$ la tangente ait un coefficient directeur triple de celui de la droite (OM) .

31 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) . Déterminer les courbes $(\mathcal{C})$ telles qu'en tout point M de $(\mathcal{C})$ la tangente soit perpendiculaire à (OM) .

32 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) . Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative d'une fonction f . On considère un point M de $(\mathcal{C})$, la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ en M et la normale (Δ) à $(\mathcal{C})$ en M . Soit N le point d'intersection, lorsqu'il existe, de (Δ) avec (OJ) . Déterminer la fonction f de façon que la courbe $(\mathcal{C})$ passe par le point $A\left(\frac{1}{2}\right)$ et que pour chacun des points de $(\mathcal{C})$ on ait $\overline{NQ} = 1$, où Q est le projeté orthogonal de M sur (OJ) .



33 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) . Soit M un point mobile. À l'instant 0, M est en I ; à l'instant π , M est en $A\left(\frac{0}{2}\right)$. À tout instant t , $\overrightarrow{OM}$ et le vecteur accélération $\vec{\Gamma}$ sont tels que : $4\vec{\Gamma} = -\overrightarrow{OM}$.
1. Calculer les coordonnées x et y de M à l'instant t .
2. Déterminer une équation de la trajectoire de M .

34 On note $Q(t)$ la quantité de carbone 14 présent à l'instant t dans un fragment d'os. On admet que Q vérifie, à tout instant t , $Q'(t) = -\lambda Q(t)$. (λ est appelé constante radioactive du carbone 14.)
1. Soit Q_0 la quantité de carbone 14 à l'instant 0. Exprimer $Q(t)$ en fonction de t et de Q_0 .
2. On appelle période (ou demi-vie) d'un élément radioactif la durée T au bout de laquelle la moitié des atomes de cet élément se sont désintégrés. Sachant que $\lambda \approx 1,244 \cdot 10^{-4}$ et que t est évalué en années, déterminer la période du carbone 14.
3. Le carbone 14 est renouvelé constamment chez les êtres vivants. À la mort de ceux-ci, l'assimilation cesse et le carbone 14 présent se désintègre. Des archéologues ont trouvé des fragments d'os dont la teneur en carbone 14 est 70% de celle d'un fragment d'os actuel de même masse, pris comme témoin. Calculer l'âge de ces fragments.

35 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y'' - 4y = 0$.
2. Démontrer que l'équation différentielle (E') : $y'' - 4y = 4(x-1)^2 - 2$ admet sur $\mathbb{R}$ une et une seule solution, qui soit une fonction polynôme P de degré 2.
3. a) Démontrer qu'une fonction f est solution de (E') si et seulement si la fonction $f - P$ est solution de (E).
b) En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E'), puis celle qui vérifie : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

36 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y' + 4y = 0$.

2. Déterminer les nombres réels a et b pour que la fonction $g : x \mapsto ax + b$ soit solution de l'équation différentielle (E') : $y'' + 4y' + 4y = -4x$.
3. Démontrer qu'une fonction f est solution de (E') si et seulement si $f - g$ est solution de (E). En déduire la solution f sur $\mathbb{R}$ de (E') telle que $f(0) = 2$ et $f'(0) = -2$.

37 On considère l'équation différentielle (E) : $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$.

1. Vérifier que la fonction $x \mapsto e^{2x}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de (E).
2. Soit f une fonction trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et g la fonction $x \mapsto f(x)e^{-2x}$. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si g'' est la fonction nulle.
3. En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E).

38 1. On considère l'équation différentielle (E) : $x^2y'' - xy' + y = 0$.

a) Soit z une fonction deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$. Démontrer que xz est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle (E') : $xz' = A$ ($A \in \mathbb{R}$).
b) Résoudre sur $]0; +\infty[$ (E') puis (E).
2. À l'aide d'un raisonnement analogue, résoudre sur $] -\infty; 0[$ l'équation différentielle : $y' = \frac{x+y}{x}$.

39 On considère l'équation différentielle (E) : $(x-1)y'' - xy' + y = 0$.

1. Démontrer que si f est solution sur $]1; +\infty[$ de (E), alors f'' est dérivable sur $]1; +\infty[$ et est solution sur cet intervalle de l'équation différentielle (E') : $y' = y$.
2. Démontrer que si f'' est dérivable sur $]1; +\infty[$ et est solution de (E'), alors : $f''(x) = f(x) + c_1x + c_2$ ($c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}$). Quelle relation doit lier c_1 et c_2 pour que f soit solution de (E) ?
3. Résoudre (E) sur $]1; +\infty[$.

40 On considère le système $(\Sigma) : \begin{cases} y' = -z \\ z' = y - 2z \end{cases}$

où les inconnues sont les fonctions y et z .
1. Démontrer que si $(y; z)$ est solution de (Σ) , alors les fonctions y et z sont deux fois dérivables et vérifient l'équation différentielle (E) : $u'' + 2u' + u = 0$.
2. Résolution de (E)
a) En écrivant (E) sous la forme $u'' + u' + u' + u = 0$, démontrer qu'une fonction est solution de (E) si et seulement si elle est solution de l'équation différentielle (E') : $v' + v = ae^{-x}$ ($a \in \mathbb{R}$).
b) Vérifier que la fonction $g : x \mapsto axe^{-x}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de (E'). Démontrer qu'une fonction f est solution de (E') si et seulement si la fonction $f - g$ est solution de l'équation différentielle : $v' + v = 0$.
c) En déduire la résolution sur $\mathbb{R}$ de (E).
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système (Σ) .

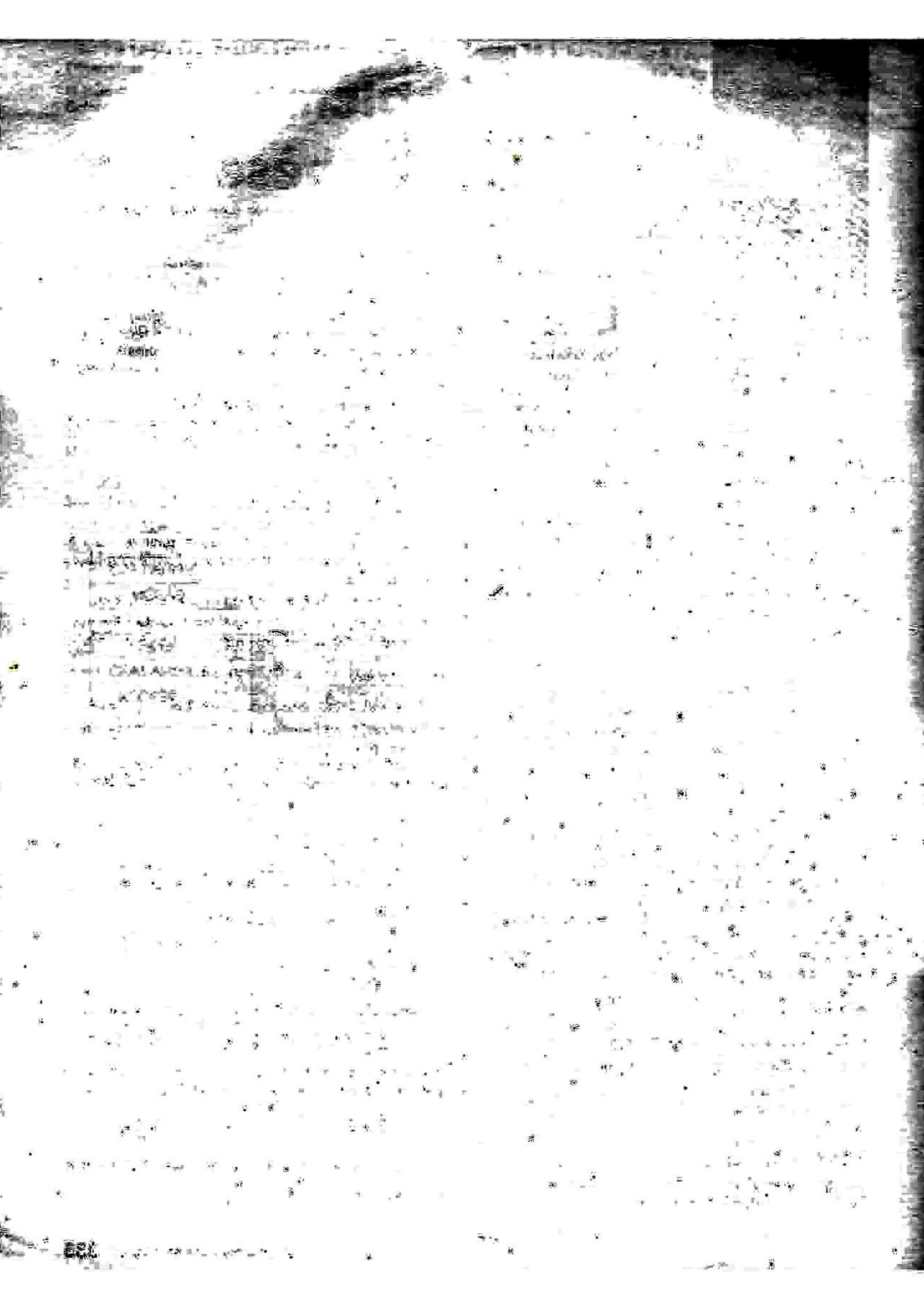
Problèmes de synthèse

Introduction

Les problèmes suivants ont été proposés entre 1996 et 1999 au baccalauréat (série C ou E) dans certains pays francophones d'Afrique et de l'Océan Indien.

Les problèmes sélectionnés sont ceux qui prennent le mieux en compte les nouveaux programmes harmonisés de mathématiques que ces pays ont en commun depuis 1992.

		CHAPITRES															
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	PAYS
P R O B L È M E S	1																BURKINA-FASO
	2																GABON
	3																TOGO
	4																BÉNIN
	5																BURKINA-FASO
	6																CAMEROUN
	7																CENTRAFRIQUE
	8																COMORES
	9																CÔTE D'IVOIRE
	10																MALI
	11																MAURITANIE
	12																TOGO
	13																BURKINA-FASO
	14																BURKINA-FASO
	15																CONGO
	16																CÔTE D'IVOIRE
	17																CÔTE D'IVOIRE
	18																CÔTE D'IVOIRE
	19																GABON
	20																MALI
	21																MAURITANIE
	22																SÉNÉGAL
	23																TCHAD
	24																CÔTE D'IVOIRE



1

Burkina-Faso

Session normale de 1996, série E.

Partie A

On considère, dans le plan complexe P , les points A d'affixe $z_A = 1$, M d'affixe z et N d'affixe $z_N = iz - (1 + i)$. On note T_λ l'application qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' barycentre des points pondérés (M, λ) , $(N, -\lambda)$ et $(A, 1)$ où λ est un nombre réel non nul.

1. Démontrer que, pour tout point M du plan, le point N est l'image de M par une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

2. a) Démontrer que l'affixe z' de M' est telle que :

$$z' = \lambda(1 - i)z + \lambda(1 + i) + 1.$$

b) Démontrer que T_λ est une similitude directe dont on précisera l'affixe ω du centre Ω , le rapport et l'angle. Pour quelles valeurs de λ , T_λ est-elle une rotation ? Donner, dans chaque cas, son angle et l'affixe de son centre.

c) Exprimer les coordonnées $(x'; y')$ de M' en fonction des coordonnées $(x; y)$ de M .

3. Le nombre réel λ étant strictement positif, on lui associe le point P de coordonnées $(-\ln \lambda; \ln \lambda)$.

Soit P' le point tel que : $P' = T_\lambda(P)$.

a) Déterminer les coordonnées de P' en fonction de λ .

b) Démontrer que, lorsque λ décrit $\mathbb{R}^*$, l'ensemble des points P' est la courbe $(\mathcal{C})$ d'équation :

$$y = 2(x - 1)\ln(x - 1) + (x - 1).$$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x \ln x + x, & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On note (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'unité graphique étant égale à 10 cm.

1. a) La fonction f est-elle continue à droite en 0 ?

Déterminer la limite à droite en 0 de $\frac{f(x)}{x}$.

Donner une interprétation géométrique du résultat.

f est-elle dérivable en 0 ?

b) Étudier les variations de la fonction f et préciser le nombre réel $x_0 \neq 0$ tel que : $f(x_0) = 0$.

c) Tracer (Γ) . Déterminer une transformation du plan par laquelle la courbe $(\mathcal{C})$ se déduit de la courbe (Γ) .

2. Soit $a \in]0; e^{-\frac{1}{2}}[$.

a) Calculer : $I(a) = \int_a^{e^{-\frac{1}{2}}} (2x \ln x + x) dx$.

b) Déterminer $\lim_{a \rightarrow 0} |I(a)|$ et en donner une interprétation géométrique.

c) Soit D le domaine formé des points $A(x; y)$ du plan

$$\text{tels que : } \begin{cases} a \leq x \leq e^{-\frac{1}{2}} \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

On fait tourner D autour de l'axe des abscisses. Calculer le volume $V(a)$ ainsi obtenu.

Déterminer $\lim_{a \rightarrow 0} V(a)$ et en donner une valeur approximative.

(On donne : $e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,74$ et $e^{-\frac{3}{2}} \approx 0,2$.)

2

Gabon

Session normale de 1996, série C.

Partie A

1. (E_0) désigne l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = 0$. Déterminer les solutions générales de (E_0) .

2. (E) est l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$.

a) Vérifier que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 e^{-x}$ est une solution particulière de (E) .

b) Démontrer que φ est une solution de (E) si et seulement si $g = \varphi - h$ est solution de (E_0) .

c) Déterminer toutes les solutions de (E) .

d) Déterminer la solution f_0 de (E) satisfaisant aux conditions initiales : $f_0(0) = 4$ et $f'_0(0) = 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = (x + 2)^2 e^{-x}.$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal, l'unité graphique étant égale à 1 cm.

1. Étudier les variations de f et tracer $(\mathcal{C})$ avec soin.

2. En remarquant que f est une solution de l'équation différentielle (E) , déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

(On calculera $\int_0^x (f'' + 2f' + f)(t) dt$).

3. Pour tout entier naturel n , on pose : $I_n = \int_0^n f(t) dt$.

a) Exprimer I_n en fonction de n et en donner une interprétation graphique.

b) Étudier la convergence de la suite (I_n) , puis en déduire l'aire de l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que : $x \leq 0$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

Partie C

On se propose d'étudier la convergence de la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul par :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n^3} \left[(1 + 2n)^2 e^{-\frac{1}{n}} + (2 + 2n)^2 e^{-\frac{2}{n}} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + (n + 2n)^2 e^{-\frac{n}{n}} \right] \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (k + 2n)^2 e^{-\frac{k}{n}}. \end{aligned}$$

1. Vérifier que, pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = u_n + \frac{4e - 9}{ne}.$$

2. Établir que, pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n - 1$, on a :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

3. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n ,

$$\text{on a : } u_n \leq \int_0^1 f(t) dt \leq u_n + \frac{4e - 9}{ne}.$$

4. En déduire que pour tout entier naturel non nul n ,

on a : $I_1 - \frac{4e-9}{ne} \leq u_n \leq I_1$.

5. Étudier la convergence de la suite u_n , puis préciser sa limite.

3 Togo

Session normale de 1996, série C.

$\mathcal{E}$ est un espace affine dans lequel est construit un cube ABCDEFGH tel que :

- la face ABCD est le support de ce cube,
- les droites (AE) et (CG) sont parallèles.

Partie A

1. Démontrer que la droite (AE) est parallèle au plan (DGH).
2. Soit I le milieu de [EF], (Δ_1) la droite issue de A et (Δ_2) la droite issue de G, toutes deux sécantes en I. Démontrer que les droites (Δ_1) et (Δ_2) déterminent le plan (AIG).
3. K est le centre du carré ADHE. Démontrer que la droite (BK) est perpendiculaire au plan (AIG).

Partie B

$\mathcal{E}$ est orienté par le repère orthonormal direct (A, $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{AE}$), I est le milieu de [EF] et K le centre du carré ADHE.

1. a) Justifier par le calcul l'existence d'un unique plan P contenant les points A, I et G.
b) Déterminer alors une équation cartésienne de ce plan.
c) Vérifier par le calcul que la droite (BK) est orthogonale au plan P et déterminer leur point d'intersection J.
2. Π est un plan de E qui passe par le point B et qui est perpendiculaire au plan P. (Δ) est une droite de Π qui passe par le point C et qui est parallèle à la droite (BK).
a) Déterminer une équation cartésienne de (Δ).
b) Déterminer les représentations paramétriques de (Δ).
c) Démontrer que (Δ) est parallèle à Π et calculer la distance du point B à la droite (Δ).
3. PLRS est un parallélogramme tel que P et L sont sur (Δ), R et S sont contenus dans Π . J_1 et J_2 sont les milieux respectifs des segments [PS] et [LR]; O est le centre de gravité de ce parallélogramme.
a) Sachant que $LR = \frac{2}{3}LS$ et $\text{Mes}(\vec{LS}, \vec{LR}) = \frac{\pi}{6}$, calculer, en fonction de LS et de OM, $MP^2 + ML^2 + MR^2 + MS^2$, où M est un point quelconque de $\mathcal{E}$.
b) En déduire l'ensemble (Γ) des points de $\mathcal{E}$ tels que : $MP^2 + ML^2 + MR^2 + MS^2 = k$, où k est un nombre réel.

4 Bénin

Session normale de 1997, série C.

Partie A

Soit P un plan euclidien, O un point de P, V le plan vectoriel associé à P, α un élément de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs unitaires de V tels que : $\vec{i} \cdot \vec{j} = \sin \alpha$.

1. Démontrer que le triplet (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) est un repère R de P.
2. Déterminer l'ensemble des valeurs de α pour lesquelles le repère R est orthonormé.
Dans toute la suite du problème, on suppose R orthonormé.
3. Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$ et ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative dans le repère R.
a) Étudier les variations de f .
b) Démontrer que O est un point d'inflexion de ($\mathcal{C}$).
c) Construire ($\mathcal{C}$) dans le repère R.
d) Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I que l'on précisera.

Partie B

1. Soit g la bijection réciproque de f .
Expliciter $g(x)$ pour tout élément x de I.
2. On considère la famille des courbes ($\mathcal{C}_{a,b}$) d'équation :

$$y = b + \log_2 \left(\frac{1+x-a}{1-x+a} \right), (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

- a) Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point de ($\mathcal{C}_{a,b}$).
Exprimer y en fonction de $g(x-a)$.
En déduire que ($\mathcal{C}_{a,b}$) est l'image de ($\mathcal{C}$) par l'application $\varphi_{(a,b)}$ telle que $\varphi_{(a,b)} = T \circ S$, où T est une translation et S une symétrie orthogonale que l'on précisera.
 - b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $\varphi_{(a,b)}$ soit une symétrie orthogonale.
 - c) On suppose : $a + b \neq 0$.
Démontrer que $\varphi_{(a,b)}$ est la composée commutative d'une symétrie orthogonale et d'une translation que l'on précisera.
 - d) Construire dans le repère R la courbe ($\mathcal{C}_{3,1}$) correspondant à $a = 3$ et $b = 1$.
3. Soit h la restriction de f à l'intervalle $[0; 1]$, ($\mathcal{C}_h$) sa courbe représentative dans le repère R, D le domaine plan limité par ($\mathcal{C}_h$) et les droites d'équations respectives $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$. On désigne par $V(D)$ le volume de la portion de l'espace engendré par la rotation de D autour de l'axe des abscisses.
Calculer $V(D)$
(On pourra utiliser l'égalité : $(2^x - 1)^2 = (2^x + 1)^2 - 4(2^x)$.)

5 Burkina-Faso

Session normale de 1997, série C.

Partie A

On considère la fonction numérique réelle f définie par $f(x) = x - \ln|x|$, où $\ln$ désigne le logarithme népérien et $|x|$ la valeur absolue du nombre réel x . On note ($\mathcal{C}$) la

courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dont l'unité vaut 2 cm.

1. a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b) Étudier le sens de variation de f .

(On dressera son tableau de variation.)

2. a) Démontrer que $(\mathcal{C})$ coupe l'axe des abscisses en un seul point A dont on notera l'abscisse α et vérifier que :

$$\alpha \in]-1; -\frac{1}{2}[.$$

b) Étudier la position relative de la courbe $(\mathcal{C})$ et de la droite (D) d'équation $y = x$.

c) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (D), ainsi que la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse -1 .

3. a) Pour tout nombre réel k élément de $]0; 1[$,

$$\text{calculer : } A(k) = 4 \int_k^1 f(x) dx.$$

b) Déterminer : $\lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ k > 0}} A(k)$.

Interpréter graphiquement ce résultat.

4. a étant un nombre réel non nul quelconque, on note M et M' les points de $(\mathcal{C})$ d'abscisses respectives a et $-a$, (T) et (T') les tangentes respectives à $(\mathcal{C})$ en M et M'.

a) Exprimer à l'aide de a les coordonnées de N, point d'intersection de (T) et (T').

b) Quel ensemble décrit N lorsque a parcourt $\mathbb{R}^*$?

Partie B

On note $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls et on considère l'application : $F : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$

$$z \mapsto -\ln |z|.$$

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des nombres complexes vérifiant l'équation :

a) $F(z) = 0$

b) $F(z) = z$

c) $F(z) = \bar{z}$, où $\bar{z}$ est le conjugué de z .

2. Soit G l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = F(z)$. On note $\mathcal{C}_R$ le cercle de centre O et de rayon R.

a) Pour tout point de $\mathcal{C}_R$ d'affixe z , donner une écriture simplifiée de $F(z)$.

b) En déduire $G(\mathcal{C}_R)$.

Pour quelle(s) valeur(s) de R a-t-on $G(\mathcal{C}_R) = \mathcal{C}_R$?

Partie C

L'objet de cette partie est de déterminer une valeur approchée du nombre réel α de la question A.2.a).

On définit la fonction φ sur $[-1; -\frac{1}{2}]$ par :

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

1. a) Démontrer que α est l'unique solution de l'équation :

$$x \in [-1; -\frac{1}{2}], \varphi(x) = x.$$

b) Vérifier que, pour tout x de $[-1; -\frac{1}{2}]$, on a :

$$\varphi(x) = \frac{x}{x-1} (\ln |x| - 1);$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{(x-1)^2} f(x).$$

c) Étudier le sens de variation de φ sur $[-1; -\frac{1}{2}]$ et donner une valeur approchée de $\varphi(-\frac{1}{2})$.

d) Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[\alpha; -\frac{1}{2}]$, $\varphi(x)$ appartient à l'intervalle $[\alpha; -\frac{1}{2}]$.

2. On considère la suite numérique (u_n) définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = -\frac{1}{2} \\ \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, u_{n+1} = \varphi(u_n) \end{cases}$$

a) Démontrer que : pour tout x de $[\alpha; -\frac{1}{2}]$, $|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{9}$.

b) En déduire que : pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9} |u_n - \alpha|$.

c) Démontrer alors que :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9}\right)^n.$$

d) Déduire de ce qui précède que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Déterminer un entier n_0 tel que : $|u_{n_0} - \alpha| \leq 10^{-2}$.

(On donne : $\ln 2 \approx 0,693$; $\ln 3 \approx 1,098$; $\ln 5 \approx 1,609$.)

6 Cameroun

Session normale de 1997, série C.

Le problème comporte deux parties indépendantes A et B.

Partie A

f est la fonction de la variable réelle x définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$

et h est la fonction définie sur le même intervalle par $h(x) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x^2+1})$.

1. Démontrer que f est une bijection de $[0; +\infty[$ vers $]0; \frac{1}{2}]$.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'unité graphique étant égale à 2 cm.

Tracer dans ce repère les courbes représentatives de f et de f^{-1} .

3. a) Calculer la dérivée de h .

b) En déduire l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la droite d'équation $x = 1$ et la courbe représentative de f .

Partie B

Le plan est orienté. ABC est un triangle équilatéral tel

que : $AB = BC = CA = 1$ et $\text{Mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$.

A' désigne le milieu du segment [BC] et G l'isobarycentre des points A, B et C.

1. Construire G et calculer GA'.

2. a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 1,25.$$

Tracer (E) sur la figure précédente.

Dans toute la suite, r désigne la rotation de centre G qui transforme C en A et h l'application qui, à tout point M du plan, associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

On pose : $s = h \circ r$.

3. a) Démontrer que h est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

b) Déterminer puis tracer sur la même figure que précédemment l'image de (E) par h .

c) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de s .

4. On note I le symétrique de A' par rapport à C, J le point de la demi-droite [A'A] tel que :

$$A'J = 1, \vec{u} = \vec{A'I} \text{ et } \vec{v} = \vec{A'J}.$$

- a) Démontrer que $(A', \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé.
 b) M étant un point d'abscisse z et M' son image par s, exprimer l'abscisse z' de M' en fonction de celle de M.
 En déduire l'expression analytique de s dans le repère $(A', \vec{u}, \vec{v})$.

7 Centrafrique

Session normale de 1997, série C.

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J), l'unité graphique étant égale à 2 cm.

1. a) Déterminer l'ensemble de définition D de f.
 Étudier les limites de f aux bornes de D. Préciser les asymptotes de la courbe (C).
 b) Étudier les variations de f ;
 dresser son tableau de variation.
 Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
 c) Construire avec soin (T) et la courbe (C).
2. On se propose de montrer que l'équation $f(x) = x$ admet sur $[0; 1]$ une solution unique.
 a) Étudier les variations de la fonction dérivée f' sur $[0; 1]$.
 Démontrer que pour tout x de l'intervalle $[0; 1]$, on a :

$$\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}.$$

- b) Étudier les variations de la fonction numérique g définie sur $[0; 1]$ par : $g(x) = f(x) - x$.
 Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $[0; 1]$ une solution unique α .

Vérifier que : $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{e}{3}$.

3. On se propose de déterminer une valeur approchée de α .

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

- a) Démontrer par récurrence que :
 pour tout n de $\mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq \frac{e}{3}$.
 b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que :
 pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha|$.
 En déduire que :
 pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.
 c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
 Quelle est sa limite ?
 d) Déterminer un entier n_0 tel que :
 si $n \geq n_0$, alors $|u_n - \alpha| \leq 10^{-2}$.

4. Ne connaissant pas de primitive de la fonction f sur $[0; \frac{1}{2}]$, on se propose de déterminer un encadrement de l'intégrale $I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$.

a) Justifier l'existence de I et en donner une interprétation graphique.

$$b) \text{ On pose : } J = \int_0^{\frac{1}{2}} (2-x) e^x dx \text{ et } K = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx.$$

Vérifier que : $4I = J + K$.

c) Calculer J.

d) Quelle est l'image par f du segment $[0; \frac{1}{2}]$?

En déduire un encadrement de K par deux intégrales simples que l'on calculera.

e) À l'aide des questions précédentes, écrire un encadrement de l'intégrale I.

En déduire un encadrement de I, d'amplitude 10^{-2} par des nombres décimaux.

8 Comores

Session normale de 1997, série C.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{i}, \vec{j}$), l'unité graphique étant égale à 2 cm.

Partie A

1. Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie par $f(x) = x - 1 + \ln(3-x)$ et (C) sa courbe représentative.

- a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.
- b) Étudier les variations de f en précisant les limites de f aux bornes de D_f et établir son tableau de variation.
- c) Soit (D) la droite d'équation $y = x - 1$.
 Étudier la position de (C) par rapport à (D) ; déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
- d) Tracer la droite (D) et la courbe (C).

2. Soit E le domaine plan délimité par la courbe (C), la droite d'équation $x = 0$ et la droite (D).
 Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de E.

Partie B

Dans cette partie, à tout point M du plan de coordonnées (x ; y), on associe son affixe $z = x + iy$.

Soit S l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M₁ d'affixe z₁ telle que : $z_1 = (-1 + i)z + 1 + 4i$.

1. Donner la nature de S et déterminer ses éléments caractéristiques.
2. Calculer les coordonnées x et y du point M en fonction des coordonnées x₁ et y₁ du point M₁.
3. Déterminer les équations des transformées par S de la droite d'équation $x = 0$ et de la droite (D).
4. Soit g la fonction numérique de la variable réelle définie par : $g(x) = -x - 1 + 2e^x$ et (Γ) sa courbe représentative dans le repère (O, $\vec{i}, \vec{j}$).

Soit M un point de (C) et M₁ = S(M).

Vérifier que l'abscisse x₁ de M₁ peut prendre toute valeur réelle et démontrer que M₁ est sur la courbe (Γ).
 Réciproquement, si M₁ est sur la courbe (Γ), montrer qu'il existe un point M de la courbe (C) tel que M₁ = S(M).

En déduire que (Γ) est l'image de (C) par S.

Partie C

1. Établir le tableau de variation de la fonction g en précisant les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

- Démontrer que la droite d'équation $y = -x - 1$ est asymptote à (Γ) .
- Tracer la courbe (Γ) et la droite d'équation $y = -x + 5$ dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, mais avec une couleur différente de celle utilisée pour $(\mathcal{C})$ et (D) .
- On appelle E_1 la partie du plan délimitée par la courbe (Γ) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $y = -x + 5$.
On admet que la partie E est transformée en E_1 par S .
Exprimer l'aire de la partie E_1 en fonction de l'aire de E , puis donner sa valeur.

9 Côte d'Ivoire

Session normale de 1997, série C.

Partie A

Soit la fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}, \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

- Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
- Soit φ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :
$$\varphi(x) = \ln x + x + 1.$$
 - Étudier les variations de φ .
 - Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique β telle que : $0,27 \leq \beta \leq 0,28$.
- Exprimer $f'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$.
En déduire les variations de f .
 - Vérifier que : $f(\beta) = -\beta$.
- Tracer la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) .
On placera les points d'abscisses 1 ; 3 ; 4 ; e^2 ; 12.
(On prendra : $\ln 0,27 \approx -1,31$; $\ln 0,28 \approx -1,27$; $\ln 2 \approx 0,7$; $\ln 3 \approx 1,1$; $\ln 5 \approx 1,6$.)

Partie B

- Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique α dans $[3; 4]$.
 - Démontrer que les équations $f(x) = 1$ et $e^{1+\frac{1}{x}} = x$ sont équivalentes.
- Soit g la fonction définie pour tout nombre réel strictement positif x par : $g(x) = e^{1+\frac{1}{x}}$.
 - Étudier les variations de g .
 - Démontrer que pour tout x élément de $[3; 4]$, $g(x)$ est un élément de $[3; 4]$.
 - Démontrer que : $\forall x \in [3; 4], g'(x) \leq \frac{1}{2}$.
(On prendra : $e^{\frac{3}{4}} \approx 3,8$ et $e^{\frac{5}{4}} \approx 3,49$.)
- Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 3$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = g(u_n)$.
 - Démontrer que, pour tout entier positif ou nul n :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|.$$

En déduire que : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$.

- Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
Calculer sa limite.
- Pour quelles valeurs de n , u_n est-elle une valeur approchée de α à 10^{-2} près ?

Partie C

- Soit n un entier naturel non nul.

Démontrer que l'équation $f(x) = n$ admet une solution α_n et une seule.

Placer α_1 et α_2 dans le même repère que précédemment.

2. a) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n , on a : $\alpha_n \geq e^n$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n , $f(\alpha_n) = n$ est équivalent à $\ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right) = \frac{n}{\alpha_n}$.

c) Dédurre des questions 2. a) et 2. b) que la suite $\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right)$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est convergente et calculer sa limite.

10 Mali

Session normale de 1997, série C.

Dans ce problème, n est un entier naturel différent de zéro et on considère la famille de fonctions f_n définies

sur $[0; +\infty[$ comme suit :
$$\begin{cases} f_n(x) = x^n \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right), \text{ si } x \neq 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

Pour les représentations graphiques, le plan est muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm, et on note $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de la fonction f_n .

Partie A

Dans cette première partie, on se propose d'étudier la fonction f_1 .

- Étudier la continuité de f_1 en 0 et son comportement en $+\infty$.
 - Étudier le comportement du rapport $\frac{f_1(x)}{x}$ lorsque x tend vers 0.
- Que peut-on conclure pour la fonction f_1 en 0 et la courbe $(\mathcal{C}_1)$?

- Justifier la dérivabilité de f_1 sur $]0; +\infty[$.
Calculer $f_1'(x)$ puis $f_1''(x)$ pour tout nombre réel appartenant à $]0; +\infty[$.
 - Étudier successivement les variations de f_1' et de f_1 et dresser le tableau de variation de f_1 .
- Tracer la courbe $(\mathcal{C}_1)$, son asymptote et la tangente au point O.

Partie B

La seconde partie est consacrée à l'étude des fonctions f_n lorsque $n \geq 2$.

- Étudier la continuité et la dérivabilité de f_n en 0 puis le comportement de f_n en $+\infty$.
- Justifier la dérivabilité de f_n sur $]0; +\infty[$.
Démontrer que : $f_n(x) = x^{n-1} g_n(x)$, où g_n est une fonction définie sur $]0; +\infty[$ que l'on déterminera.
 - Étudier les variations de la fonction g_n et en déduire le signe de $g_n(x)$.
 - Dresser le tableau de variation de f_n .

Partie C

La troisième partie porte sur les courbes $(\mathcal{C}_n)$ lorsque $n \geq 2$.

- Quelle est la tangente à $(\mathcal{C}_n)$ en O, origine du repère ?
- Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_n)$ et de $(\mathcal{C}_{n+1})$ pour

$n \geq 2$.

Quelle est la position de $(\mathcal{C}_1)$ par rapport à toutes les courbes $(\mathcal{C}_n)$?

3. a) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}) - (x - \frac{1}{2})]$.

Que peut-on en conclure pour $(\mathcal{C}_2)$?

b) Préciser la position de $(\mathcal{C}_2)$ par rapport à la droite d'équation : $y = x - \frac{1}{2}$.

4. Tracer $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_3)$ dans le même repère que $(\mathcal{C}_1)$.

11

Mauritanie

Session normale de 1997, série C.

L'objet du problème est l'étude des solutions de l'équation d'inconnue $y : x = (\frac{y}{n} + 1)^n$, où n est un entier naturel non nul.

Partie A

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. x et y sont des nombres réels et $n = 2$.

1. Démontrer que les points M du plan dont les coordonnées $(x ; y)$ vérifient $x = (\frac{y}{2} + 1)^2$ sont les points d'une conique (Γ) que l'on représentera.

2. Soit g l'application de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = 2(\sqrt{x} - 1).$$

a) Étudier les variations de g et montrer que sa courbe représentative $(\mathcal{C})$ est une partie de la conique (Γ) .

b) Calculer l'aire de l'ensemble des points M dont les

coordonnées $(x ; y)$ vérifient : $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ g(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$.

En déduire l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$ et le segment $[A_0 A_1]$, où A_0 est le point de coordonnées $(0 ; g(0))$ et A_1 le point de coordonnées $(1 ; g(1))$. On considère le point A_k de coordonnées $(k ; g(k))$, où $k \in \mathbb{N}$.

Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$ et le segment $[A_k A_{k+1}]$ est égale à $\frac{1}{3}$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

x et y sont des nombres complexes et $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

1. Démontrer que, pour tout nombre complexe x non nul, l'équation $x = (\frac{y}{n} + 1)^n$ admet n solutions distinctes $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$.

2. On suppose que : $x = 1$.

On note $I_0, I_1, \dots, I_{n-1}$ les points qui ont pour affixes les solutions de l'équation $z^n = 1$, $z \in \mathbb{C}$. Soit $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$ les points d'affixes respectives $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ définis à la question B1.

a) Démontrer que les points $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$ sont les images des points $I_0, I_1, \dots, I_{n-1}$ par une transformation que l'on déterminera.

Démontrer que les points $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$ sont les sommets d'un polygone régulier.

Faire un dessin dans le cas de $n = 4$.

b) Soit G_n l'isobarycentre des points $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$.

Déterminer l'abscisse de G_n .

Partie C

x est un nombre réel strictement positif fixé.

1. n étant donné dans $\mathbb{N}^*$, exprimer y en fonction de x .

2. On considère la suite réelle de terme général :

$$u_n(x) = n(\sqrt[n]{x} - 1), \quad n > 0.$$

Pour étudier le sens de variation de cette suite, on calcule pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1}(x) - u_n(x)$ en fonction de la variable t définie par $x = t^{n(n+1)}$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Démontrer que $u_{n+1}(x) - u_n(x)$ peut s'écrire sous la forme $(t-1)P(t)$ où $P(t)$ est un polynôme de la variable t .

Étudier le signe de $P(t)$ suivant les valeurs de t et en déduire le sens de variation de la suite réelle de terme général $u_n(x)$ sur $\mathbb{N}^*$.

3. Démontrer que :

pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, x fixé, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = 1$.

4. On suppose que : $x \in]1 ; +\infty[$, x fixé.

a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) > 0$.

En déduire que la suite $u_n(x)$ est une suite convergente.

b) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(\frac{1}{x})$ en fonction de $u_n(x)$.

En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(\frac{1}{x})$ existe. Quelle est cette limite ?

5. a) On suppose que : $x = 1$.

Que peut-on dire de la suite de terme général $u_n(1)$?

b) Déduire de ce qui précède que pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, la suite de terme général $u_n(x)$ est une suite convergente.

On note $f(x)$ la limite de cette suite. Préciser $f(1)$.

12

Togo

Session normale de 1997, série C.

Partie A

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = \exp(\frac{1-x}{1+x})$, où $\exp$ désigne l'exponentiel népérien. Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) Étudier les variations de f , puis dresser son tableau de variation.

b) Justifier que l'on peut prolonger f par continuité à gauche en -1 .

2. a) Démontrer que f est une bijection de son ensemble de définition vers un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

b) Expliciter $f^{-1}(x)$.

3. Soit $(\mathcal{C}')$ la courbe représentative de f^{-1} . Tracer $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4. En s'aidant de la méthode des rectangles, donner un encadrement de la partie du plan limitée par les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ et les droites d'équations : $y = 2$ et $x = 2$.

(On pourra subdiviser l'intervalle $[1 ; 2]$ en cinq intervalles de même amplitude).

Partie B

Soit f_a la fonction numérique de la variable réelle x

définie par : $f_{\alpha}(x) = \exp\left(\frac{\alpha-x}{\alpha+x}\right)$ ($\alpha \neq 0$).

On désigne par $(\mathcal{C}_{\alpha})$ la courbe représentative de f_{α} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Étudier les variations de f_{α} et établir son tableau de variation suivant les valeurs de α , ($\alpha \neq 0$).

b) Démontrer que pour tout α non nul, f_{α} est une bijection de son ensemble de définition vers un sous-ensemble J de $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

c) Expliciter $f_{\alpha}^{-1}(x)$.

Partie C

Dans cette question, on suppose : $\alpha > 0$ et $\alpha \neq 1$.

1. Trouver une application affine g transformant $(\mathcal{C})$ en $(\mathcal{C}_{\alpha})$, et une application ϕ transformant $(\mathcal{C})$ en $(\mathcal{C}'_{\alpha})$, où $(\mathcal{C}'_{\alpha})$ désigne la courbe représentative de f_{α}^{-1} .

2. Soit (Γ) le cercle de centre O et de rayon 1. Soit (Γ_{α}) l'image de (Γ) par g et (Γ'_{α}) l'image de (Γ) par ϕ .

a) Donner une équation cartésienne de (Γ_{α}) et de (Γ'_{α}) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

b) Préciser les éléments caractéristiques de (Γ_{α}) et (Γ'_{α}) dans ce repère.

3. Tracer (Γ_{α}) pour $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\alpha = 2$ dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4. a) Déterminer la transformation t telle que $t(\Gamma_{\alpha}) = (\Gamma'_{\alpha})$.

b) Démontrer qu'il existe une similitude directe S et une similitude indirecte S' telles que :

$$S(\Gamma_{\alpha}) = (\Gamma_{\frac{1}{\alpha}}) \text{ et } S'(\Gamma_{\alpha}) = (\Gamma_{\frac{1}{\alpha}}).$$

c) Peut-on dire que $S = S'$?

Si non, expliquer alors le résultat du 4. b).

5. On suppose dans cette question $\alpha > 1$

et on pose : $S^n = S^{n-1} \circ S$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Vers quel ensemble converge $S^n(\Gamma_{\alpha})$, lorsque n tend vers plus l'infini ?

13 Burkina-Faso

Session de remplacement de 1998, série C.

Partie A

On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $I = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ par : $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$.

1. Démontrer que pour tout t de I on a : $g'(t) = \frac{-t^3}{1+t}$.

2. Dédire de 1. que pour tout t de I , on a :

$$\begin{cases} -2t^3 \leq g'(t) \leq 0, & \text{si } t \geq 0 \\ 0 \leq g'(t) \leq -2t^3, & \text{si } -\frac{1}{2} \leq t \leq 0 \end{cases}$$

puis, en intégrant, démontrer que pour tout x de I , on a :

$$-\frac{1}{2}x^4 \leq g(x) \leq 0.$$

Partie B

Soit f la fonction numérique définie sur $]-1; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

1. a) Vérifier que pour tout $x \geq -\frac{1}{2}$ et $x \neq 0$,

$$f(x) = -\frac{g(x)}{x^2} + \frac{1}{2} - \frac{x}{3}.$$

b) En utilisant l'inégalité trouvée en A.2. démontrer que f est dérivable en 0 et déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.

c) f est-elle continue en 0 ? Justifier votre réponse.

2. Soit h la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{-x^2 - 2x}{1+x} + 2\ln(1+x).$$

a) Étudier le sens de variation de h .

Calculer $h(0)$ et en déduire le signe de h sur $]-1; +\infty[$.

b) Démontrer que pour tout x appartenant à

$$]-1; 0[\cup]0; +\infty[, \text{ on a : } f'(x) = \frac{h(x)}{x^3}.$$

c) Dresser le tableau de variation de f en précisant les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3. Construire la courbe $(\mathcal{C})$ et la tangente (T) .

Préciser les asymptotes à $(\mathcal{C})$.

4. Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ du domaine plan limité par les droites d'équations $x = 1$, $x = \lambda$ ($\lambda > 1$), l'axe des abscisses et la courbe $(\mathcal{C})$.

Déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

Partie C

1. a) Démontrer que la fonction ϕ définie sur $]-1; +\infty[$, par $\phi(x) = f(x) - x$ est continue et strictement croissante.

b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $]-1; +\infty[$ et que $\frac{1}{4} \leq \alpha \leq 1$.

2. Sachant que pour tout $x \geq 0$ on a $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$

démontrer que pour tout $x \geq 0$ on a : $-\frac{1}{1+x} \leq f'(x) \leq 0$;

puis que pour tout x de l'intervalle $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$, $|f'(x)| \leq \frac{4}{5}$.

(On pourra utiliser les résultats de B2).

3. Soit J l'intervalle $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$. Démontrer que $f(J) \subset J$.

4. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in J$.

b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{5} |u_n - \alpha|$;

puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{3}{4} \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

d) Déterminer l'entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, u_n est une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

(On donne :

$$0,69 \leq \ln 2 \leq 0,70 ; 0,22 \leq \ln \frac{5}{4} \leq 0,23 ; \ln \frac{4}{30} \leq -2,01).$$

14 Burkina-Faso

Session normale de 1998, série E.

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, l'unité graphique étant égale à 2 cm.

Partie A

Soit t un nombre réel fixé, on note N le point d'affixe $z_N = 2(\cos t)e^{it}$ et M le point d'affixe $z_M = 2(1 + \cos t)e^{it}$.

1. a) Démontrer que N est sur le cercle ($\mathcal{C}$) de centre Ω d'affixe $z_\Omega = 1$, passant par O, quelle que soit la valeur fixée de t .

b) Vérifier que les points O, N et M sont alignés et calculer NM.

c) Construire N_1 et M_1 pour $t_1 = \frac{\pi}{4}$, puis N'_1 et M'_1 pour $t'_1 = -\frac{\pi}{4}$.

2. Pour t fixé, on considère la translation $T_{\vec{NM}}$ de vecteur $\vec{NM}$.

a) Démontrer que l'image ($\mathcal{C}'$) de ($\mathcal{C}$) par $T_{\vec{NM}}$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b) Démontrer que ($\mathcal{C}$) et ($\mathcal{C}'$) sont tangents au point I d'affixe : $z_I = 1 + e^{it}$.

3. Démontrer qu'il existe une réflexion d'axe (Δ), que l'on caractérisera, qui transforme ($\mathcal{C}$) en ($\mathcal{C}'$). On la note R.

4. On suppose que : $N \neq O$.

Soit R_1 la réflexion qui transforme O en N.

a) Déterminer son axe (Δ_1).

b) Justifier que l'on a : $M = T_{\vec{NM}} \circ R_1(O)$.

c) En déduire que M est l'image de O par R.

5. On suppose que $t \neq \pi$ et on note $\vec{u}$ le vecteur d'affixe : $z_{\vec{u}} = \sin t + \sin 2t - i(\cos t + \cos 2t)$.

Démontrer que $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{IM}$.

6. Compléter la construction précédente en construisant :

– pour $t_1 = \frac{\pi}{4}$ le point Ω_1 , centre de l'image ($\mathcal{C}_1$) de ($\mathcal{C}$) par la translation de vecteur $\vec{N_1M_1}$ et le point de tangence I_1 de ($\mathcal{C}_1$) et ($\mathcal{C}$).

– pour $t'_1 = -\frac{\pi}{4}$ le point Ω'_1 , centre de l'image ($\mathcal{C}'_1$) de ($\mathcal{C}$) par la translation de vecteur $\vec{N'_1M'_1}$ et le point de tangence I'_1 de ($\mathcal{C}'_1$) et ($\mathcal{C}$).

Partie B

On se propose d'étudier la courbe (Γ) décrite par le point M dont les coordonnées dans le repère ($O, \vec{e}_1, \vec{e}_2$)

sont données par :
$$\begin{cases} x(t) = 4(\cos^2 \frac{t}{2}) \cos t \\ y(t) = 4(\cos^2 \frac{t}{2}) \sin t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. a) Étudier la parité des fonctions x et y .

b) Étudier la périodicité des fonctions x et y .

c) En déduire qu'il suffit de savoir tracer la partie de (Γ) correspondant à $0 \leq t \leq \pi$ pour obtenir (Γ) par une transformation que l'on précisera. On note (Γ_1) cette partie de (Γ).

2. a) Vérifier que pour tout t élément de $[0; \pi]$ on a : $x'(t) = -2(\sin t)(2\cos t + 1)$ et $y'(t) = 2(2\cos t - 1)(\cos t + 1)$.

b) Étudier les variations des fonctions x et y .

3. Soit $\vec{V}(t)$ le vecteur de coordonnées $(x'(t); y'(t))$.

a) Justifier que le vecteur $\vec{V}(t)$ est un vecteur directeur de la tangente en M à (Γ_1), sauf pour une valeur de t que l'on donnera.

b) On note B le point d'intersection, autre que O, de (Γ_1) et l'axe des ordonnées. Calculer l'ordonnée de B et déterminer la tangente à (Γ_1) en B.

c) Déterminer les points de (Γ_1) pour lesquels le vecteur $\vec{V}(t)$ dirige un des axes du repère.

4. Pour $t \in]\frac{\pi}{2}; \pi[$, on note a le coefficient directeur de la droite (OM).

a) Démontrer que : $a = \tan t$.

b) En déduire la tangente en O à (Γ_1).

Partie C

Construction de (Γ).

1. On suppose que M a pour affixe : $z_M = 2(1 + \cos t)e^{it}$. Démontrer que : « M appartient à (Γ) équivaut à M a pour affixe z_M ».

2. Vérifier que $\vec{V}(t) = -2\vec{u}$, $\vec{u}$ étant le vecteur défini dans la partie A.5.

3. Tracer (Γ) dans le repère ($O, \vec{e}_1, \vec{e}_2$) déjà utilisé dans la partie A, en tenant compte des résultats obtenus aux questions A, B et C et en plaçant tous les points particuliers obtenus ainsi que les tangentes en ces points à (Γ).

15 Congo

Session normale de 1998, série C.

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie

par :
$$\begin{cases} f(x) = 2e^{x+1} - x^2 - 2x - 2, & \text{si } x < -1 \\ f(x) = 1 + \sin^3 \pi x, & \text{si } -1 \leq x \leq 1. \\ f(x) = x + \ln\left(\frac{1+x}{2x}\right), & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On désigne par ($\mathcal{C}$) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé ($O, \vec{i}, \vec{j}$), l'unité graphique étant égale à 2 cm.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .

2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x = -1$ et $x = 1$.

3. Étudier les variations de f .

4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions, l'une notée x_0 que l'on précisera et l'autre notée α ; $\alpha \in]-2; -1[$.

5. Démontrer que la parabole (P) d'équation $y = -x^2 - 2x - 2$ est asymptote à ($\mathcal{C}$). Préciser l'autre asymptote.

6. Tracer ($\mathcal{C}$) et (P).

7. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe ($\mathcal{C}$), les droites d'équations $y = 1$, $x = 1$ et $x = 0$.

8. On définit l'application $g = h \circ S_{(\Delta)}$, où h est l'homothétie de centre O et de rapport 2, $S_{(\Delta)}$ la symétrie orthogonale d'axe la droite (Δ) d'équation $y = x$.

(Γ) désigne la représentation graphique de la restriction de f à l'intervalle $[0; 1]$.

a) Caractériser g .

b) Construire les points J' , A' , I' et B' , images respectives par g des points $J(0; 1)$, $A(\frac{1}{2}; 2)$, $I(1; 0)$ et $B(1; 1)$.

c) Tracer (Γ'), image de (Γ) par g .

d) En déduire l'aire du domaine plan limité par (Γ'), les droites ($J'B'$), (OJ') et (OI').

16 Côte d'Ivoire

Session normale de 1998, série C.

Ce problème comporte trois parties A, B et C. Les parties B et C sont indépendantes.

Le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, l'unité graphique étant égale à 1 cm.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 4\sqrt{x+4}.$$

1. a) Étudier la dérivabilité de f en 0. En déduire une interprétation géométrique.

b) Étudier les variations de f .

c) Tracer la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de f dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On utilisera la feuille de papier millimétré dans le sens horizontal. On placera l'axe Oy à 3 cm du bord gauche de la feuille et l'axe Ox à 3 cm du bas de la feuille.

2. a) Soit g la restriction de f à $[4; +\infty[$.

Démontrer que g est une bijection de $[4; +\infty[$ sur $[0; +\infty[$ et que son application réciproque g^{-1} est définie sur $[0; +\infty[$ par : $g^{-1}(x) = x + 4\sqrt{x+4}$.

b) Tracer la courbe représentative $(\mathcal{C}')$ de g^{-1} dans le même repère que $(\mathcal{C})$. On note (H) la courbe $(\mathcal{C}) \cup (\mathcal{C}')$.

3. Soit (E) la courbe d'équation

$$x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 8y + 16 = 0$$

dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

a) Démontrer que pour tous les réels x et y positifs, on a : $x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 8y + 16 = 0 \Leftrightarrow [y - f(x)][y - g^{-1}(x)] = 0$.

En déduire que : $(H) = (E)$.

b) Démontrer que si un point $M(a; b)$ appartient à (E) alors le point $M'(b; a)$ appartient également à (E) .

En déduire que la courbe (E) admet un axe de symétrie. Préciser cet axe.

4. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

Partie B

1. Soit m un nombre réel appartenant à l'intervalle $] -2; 2[$.

a) soit les points A_m de coordonnées $(2 + m; 0)$ et B_m de coordonnées $(0; 2 - m)$.

Écrire une équation de la droite (D_m) passant par A_m et B_m .

b) Soit (Δ_m) la droite d'équation : $x - y - 2m = 0$.

Démontrer que le point d'intersection T_m des droites (D_m) et (Δ_m) a pour coordonnées $(\frac{1}{4}(2 + m)^2; \frac{1}{4}(2 - m)^2)$.

c) Démontrer que la droite (D_m) est tangente à $(\mathcal{C})$ au point T_m .

2. a) Soit H_m le projeté orthogonal de T_m sur la droite (δ) d'équation $y = -x$.

Démontrer que le point H_m a pour coordonnées $(m; -m)$.

b) Soit F le point de coordonnées $(2; 2)$.

Démontrer que le quadrilatère $A_m H_m B_m F$ est un carré pour tout m appartenant à $] -2; 2[$.

3. Pour $m = \frac{1}{2}$, placer le point T_m , tracer les droites (D_m) , (Δ_m) et le carré $A_m H_m B_m F$.

Partie C

1. Soit M un point d'affixe z .

a) Démontrer que le point H d'affixe $\frac{z - i\bar{z}}{2}$ est le projeté orthogonal de M sur la droite (δ) .

b) Démontrer que la distance de M à (δ) est égale à $|\frac{z + i\bar{z}}{2}|$.

2. a) Démontrer que l'ensemble des points M d'affixe z

telle que $|\frac{z + i\bar{z}}{2}| = |z - (2 + 2i)|$ est la courbe (E) .

b) Interpréter géométriquement ce résultat.

En déduire la nature de la courbe (E) .

En donner deux éléments caractéristiques.

17 Côte d'Ivoire

Session de remplacement de 1998, série C.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{x + e^x}$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) , l'unité graphique étant égale à 4 cm.

Partie A

1. a) Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x , puis étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .

En déduire le sens de variation de f .

b) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ et dresser le tableau de variation de f .

2. Démontrer que le point A de coordonnées $(0; \frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C})$.

3. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point A .

4. Soit φ la fonction définie par : $\varphi(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x - f(x)$.

a) Démontrer que : $\forall x \in]-\infty; 0[, \varphi(x) > 0$;

$$\forall x \in]0; +\infty[, \varphi(x) < 0.$$

b) En déduire la position de (T) par rapport à $(\mathcal{C})$.

c) Tracer (T) et $(\mathcal{C})$.

Partie B

Pour tout nombre réel non nul m , on considère les fonctions f_m définies par : $f_m(x) = f(\frac{x}{m})$.

$(\mathcal{C}_m)$ désigne la courbe représentative de f_m dans le repère (O, I, J) .

Soit T_m la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que : $\vec{HM'} = m\vec{HM}$, où H est le projeté orthogonal de M sur (OJ) .

1. a) Déterminer la nature de T_{-1} .

b) Démontrer que $(\mathcal{C}_m)$ est l'image par T_m de $(\mathcal{C})$.

c) Tracer $(\mathcal{C}_{-1})$.

2. Soit λ un nombre réel. On pose : $I_m(\lambda) = \int_{-\lambda}^{\lambda} f_m(x) dx$.

Calculer $I_m(\lambda)$ et en déduire que $I_m(\lambda)$ est indépendant de m .

Partie C

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x - f(x)$.

1. a) Étudier le sens de variation de g .

b) Calculer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.

c) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α et que $\frac{1}{4} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$.

2. a) Démontrer que : $\forall x \in [\frac{1}{4}; \frac{1}{2}], f(x) \in [\frac{1}{4}; \frac{1}{2}]$.

b) Calculer $f''(x)$.

En déduire que : $\forall x \in [\frac{1}{4}; \frac{1}{2}], |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

c) En déduire que : $\forall x \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right], |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4} |x - \alpha|$.

3. Soit (U_n) la suite de nombres réels définie par la relation de récurrence : $U_0 = \frac{1}{4}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(U_n)$.

a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$.

b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |U_n - \alpha|$.

c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.

4. a) Déterminer la limite de (U_n) .

b) Trouver le plus petit entier naturel p tel que : $|U_p - \alpha| \leq 10^{-2}$.

18 Côte d'Ivoire

Session normale de 1998, série E.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = x^n e^{-x}.$$

On note C_n la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'unité graphique étant égale à 3 cm.

Partie A

1. Étudier les variations de f_1 et déterminer sa limite en $+\infty$. Tracer C_1 en précisant la tangente à l'origine.

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, étudier les variations de f_n .

Tracer C_3 dans un autre repère, en précisant la tangente à l'origine.

3. On note S_n la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $x = n$ et C'_n l'image de C_n par S_n .

a) M étant le point du plan de coordonnées $(x; y)$, calculer les coordonnées $(x'; y')$ de son image M' par S_n .

b) Démontrer que C'_n est l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient : $x \leq 2n$ et $y = f_n(2n - x)$.

c) Tracer C'_3 dans le même repère que C_3 .

Pour $x \leq 2n$, on pose : $g_n(x) = f_n(2n - x)$.

d) En interprétant géométriquement les intégrales, justifier l'égalité : $\int_n^{2n} f_n(t) dt = \int_0^n g_n(t) dt$.

4. Pour tout x élément $[0; n]$, on pose :

$$h_n(x) = \ln(g_n(x)) - \ln(f_n(x)).$$

a) De l'étude des variations de h_n , déduire le signe de $h_n(x)$.

b) Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; n]$ on a : $f_n(x) \leq g_n(x)$.

c) Déduire de ce qui précède l'inégalité :

$$\int_0^n f_n(t) dt \leq \int_n^{2n} f_n(t) dt.$$

Partie B

Pour tout nombre réel positif x , on pose : $F_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt$.

1. Démontrer que la fonction F_n est croissante sur $[0; +\infty[$.

2. À l'aide d'intégrations par parties :

a) Calculer $F_1(x)$.

b) Démontrer que, pour tout nombre réel positif x et pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :

$$F_{n+1}(x) = (n+1)F_n(x) - f_{n+1}(x).$$

3) En déduire à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout nombre réel positif x et pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

$$F_n(x) = n! \left[1 - e^{-x} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) \right].$$

4. a) Démontrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x) = n!$.

b) Démontrer que pour tout nombre réel positif ou nul x , on a : $F_n(x) \leq n!$.

Partie C

1. Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal

à 1 on a : $F_n(n) + \int_n^{2n} f_n(t) dt \leq n!$.

2. Déduire des résultats des parties A et B que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :

$$0 \leq F_n(n) \leq \frac{n!}{2};$$

$$\frac{1}{2} e^n \leq 1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \dots + \frac{n^n}{n!} \leq e^n.$$

19 Gabon

Session normale de 1998, séries C et E.

Le problème a pour objet l'étude d'une suite de fonctions, d'une suite d'intégrales, puis la recherche d'une valeur approchée d'une équation du type : $f(x) = k$.

Partie A

On note f_n la fonction numérique de la variable réelle définie sur $]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{e^{1+x}}{(x+2)^n}$, pour n entier naturel non nul.

$(\mathcal{C}_n)$ désigne la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'unité graphique étant égale à 2 cm.

1. a) Étudier les limites de f_n en $-\infty$ et en $+\infty$.

(Pour la limite en $+\infty$, on posera : $X = x + 2$).

b) Étudier suivant la parité de n , la limite de f_n en -2 .

2. a) Calculer $f'_n(x)$, puis étudier son signe suivant la parité de n .

b) Dresser le tableau de variation de f_n .

3. Démontrer que toutes les courbes $(\mathcal{C}_n)$ passent par un point fixe A.

Déterminer une équation de la tangente (T_n) à $(\mathcal{C}_n)$ en A.

4. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement ce résultat.

b) Démontrer que pour tout entier n non nul, et pour tout nombre réel x différent de -2 , on a :

$$f'_n(x) = f_n(x) - n f_{n+1}(x).$$

c) En déduire les positions relatives des courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$. Représenter graphiquement $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$.

Partie B

Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = \int_{-1}^0 f_n(x) dx$, pour tout entier naturel n non nul.

1. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante et que pour tout n non nul, on a : $(u_n) \geq 0$.

Que peut-on en déduire ?

2. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a : $\frac{1-2^{-n+1}}{n-1} \leq u_n \leq \left(\frac{1-2^{-n+1}}{n-1}\right)e$.

En déduire la limite de la suite (u_n) .

3. a) En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 on a :

$$n u_{n+1} = 1 + u_n - \frac{e}{2^n}.$$

b) Retrouver ce résultat en utilisant la relation de la question 4. b) de la partie A.

c) En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1}^0 \frac{n e^{1+x}}{(x+2)^{n+1}} dx = 1$.

Partie C

On considère la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $g(x) = f_1(x-1)$. On note (Γ) sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Construire la courbe (Γ) à partir de la courbe $(\mathcal{C}_1)$. Justifier la construction.

2. On note φ la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $\varphi(x) = 1 + \ln(1+x)$.

a) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $I = [2 ; 3]$.

b) Démontrer que pour x positif, l'équation $\varphi(x) = x$ est équivalente à l'équation $g(x) = e$.

c) Démontrer que pour tout x de I , $|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{3}$.

3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = \varphi(v_n)$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est croissante et majorée par α . Conclure.

b) Démontrer que : $\varphi(I) \subset I$.

c) Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n , v_n appartient à l'intervalle I .

4. a) Démontrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$|v_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3} |v_n - \alpha|, \text{ puis que : } \alpha - v_{n+1} \leq \frac{1}{3} (\alpha - v_n).$$

b) En déduire que, pour tout entier naturel n , $\alpha - v_n \leq \frac{1}{3}$ et que la suite (v_n) converge vers α .

c) Déterminer un entier naturel p pour lequel v_p est une valeur approchée de α à 10^{-3} près. Calculer cette valeur approchée.

20 Mali

Session normale de 1998, séries SE, MTI, MTGC.

On désigne par $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal du plan et a, b, c trois nombres réels.

Les fonctions f_0, f_1, f_2 et f sont respectivement définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f_0(x) = e^{-\frac{x}{2}}, \quad f_1(x) = x e^{-\frac{x}{2}}, \quad f_2(x) = x^2 e^{-\frac{x}{2}}$$

$$\text{et } f(x) = (a + bx + cx^2) e^{-\frac{x}{2}}.$$

On désignera par $(\mathcal{C}_0), (\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ les courbes représentatives de f_0, f_1 et f_2 dans le repère R .

Partie A

On se propose de représenter $(\mathcal{C}_0), (\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$.

1. Étudier les variations des fonctions f_0, f_1 et f_2 .

2. Préciser par leurs coordonnées dans le repère R , les points d'intersection de $(\mathcal{C}_0)$ et $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_0)$ et $(\mathcal{C}_2)$, $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$.

3. Étudier dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, le signe de chacune des expressions :

$$f_1(x) - f_0(x), \quad f_2(x) - f_0(x) \quad \text{et} \quad f_2(x) - f_1(x).$$

4. Tracer $(\mathcal{C}_0), (\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ dans le repère R et hachurer le domaine fermé (E) déterminé par les trois courbes $(\mathcal{C}_0), (\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$, c'est-à-dire l'ensemble (E) des points M du plan, dont les coordonnées $(x; y)$ dans le repère R vérifient :

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ f_2(x) \leq y \leq f_0(x) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ f_1(x) \leq y \leq f_0(x) \end{cases}.$$

Partie B

On se propose de calculer l'aire de (E) .

1. Soit n , un entier naturel quelconque. Démontrer qu'en posant $I_n(x) = \int_0^x t^n e^{-\frac{t}{2}} dt$, on définit une fonction I_n qui a l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels pour ensemble de définition.

2. Soit n un entier naturel et x un nombre réel quelconque.

Démontrer que : $I_{n+1}(x) = -2x^{n+1} e^{-\frac{x}{2}} + 2(n+1) I_n(x)$.

3. Soit x un nombre réel quelconque.

a) Calculer $I_0(x)$ en fonction de x .

b) En déduire les expressions de $I_1(x)$ et $I_2(x)$ en fonction de x .

4. Calculer l'aire de (E) .

Partie C

On se propose de calculer la dérivée d'ordre n de f .

On désigne par $f^{(0)}$ (ou f), $f^{(1)}$ (ou f'), $f^{(2)}$ (ou f''), $f^{(3)}$ (ou f'''), etc. les dérivées successives de la fonction f .

1. Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n , on peut trouver trois nombres réels α_n, β_n et γ_n vérifiant pour tout nombre réel x :

$$f^{(n)}(x) = (\alpha_n + \beta_n x + \gamma_n x^2) e^{-\frac{x}{2}}.$$

On trouvera $\alpha_0 = a, \beta_0 = b$ et $\gamma_0 = c$ et pour chaque entier naturel n , le raisonnement par récurrence montrera que $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}$ et γ_{n+1} vérifient :

$$\alpha_{n+1} = \beta_n - \frac{1}{2} \alpha_n, \quad \beta_{n+1} = 2\gamma_n - \frac{1}{2} \beta_n \quad \text{et} \quad \gamma_{n+1} = -\frac{1}{2} \gamma_n.$$

2. Pour chaque entier naturel n , on pose :

$$\beta'_n = \beta_n + 4n\gamma_n \quad \text{et} \quad \alpha'_n = \alpha_n + 2n\beta_n + 4n(n+1)\gamma_n.$$

Démontrer que $(\gamma_n), (\beta'_n)$ et (α'_n) sont des suites géométriques de raison $-\frac{1}{2}$.

3. En déduire pour chaque entier naturel n , l'expression de α_n, β_n et γ_n en fonction de n, a, b et c .

21 Mauritanie

Session complémentaire de 1998, série C.

Le problème est composé de l'étude d'une suite de fonctions dépendant d'un paramètre, puis de la recherche d'une valeur approchée d'une solution d'une équation du type : $f(x) = x$.

Partie A

Pour tout entier n strictement positif, on note f_n la fonction numérique de la variable réelle définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par :

$$f_n(x) = \frac{e^x}{(x+1)^n}.$$

On note $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm).

1. Déterminer la fonction dérivée f'_n de f_n et donner l'expression de f'_n en fonction de f_n et de f_{n+1} .

2. Étudier les variations de f_n et ses limites éventuelles en $-\infty$, -1 et $+\infty$.

(On distinguera les cas où n est pair et n est impair.)

3. Démontrer que toutes les courbes $(\mathcal{C}_n)$ passent par un même point.

4. Déterminer la limite de $f_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Que peut-on en déduire pour les courbes $(\mathcal{C}_n)$?

Tracer sur deux figures distinctes les courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$.

Partie B

Pour tout entier n strictement positif, on note :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx.$$

1. Démontrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et qu'elle converge.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \leq I_n \leq \frac{e}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

3. Démontrer en utilisant la relation de la question A.1., une relation entre I_n et I_{n+1} .

4. Démontrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_{n+1} = 1$.

En déduire que la suite $(n I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Partie C

Dans cette partie, $n = 2$.

1. Démontrer que l'équation $f_2(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Le but de cette partie est de déterminer une valeur approchée de α .

2. Étudier les variations de f'_2 dans $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ et en déduire que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, on a : $-0,25 \leq f'_2(x) \leq 0$.

3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, u_{n+1} = f_2(u_n) \end{cases}$$

a) Démontrer que pour tout entier naturel n , u_n est élément de $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

b) Démontrer, en utilisant la question C.2., que pour tout entier naturel n : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$.

c) En déduire que pour tout entier naturel n , $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ et que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .

d) Pour quelles valeurs de n , u_n est-elle une valeur approchée de α à 10^{-3} près ?

(On donne : $\sqrt{e} \approx 1,65$; $\ln 2 \approx 0,69$; $\ln 5 \approx 1,6$.)

22 Sénégal

Session normale de 1998, séries C - E - S.

Partie A

Soit Φ la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} \Phi(x) = \frac{x}{(\ln x)^2}, & \text{si } x > 0 \\ \Phi(0) = 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que Φ est une fonction continue sur son ensemble de définition.

2. a) Étudier la dérivabilité de Φ en 0.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction Φ .

3. a) Étudier le comportement asymptotique de Φ pour les grandes valeurs de x .

b) Préciser la tangente (T) à la courbe (C) représentative de Φ au point d'abscisse e .

c) Tracer (C) et (T) dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

4. Démontrer que l'équation $\Phi(x) = e$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $]1; +\infty[$ et que l'une de ces solutions est comprise entre e^3 et e^4 .

Partie B

Dans cette partie, on considère la fonction f définie par

$$f:]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}.$$

$$x \mapsto \int_e^x \frac{dt}{\ln t}$$

Le but de cette partie est de représenter graphiquement cette fonction sans connaître l'expression explicite de $f'(x)$.

1. a) Justifier l'existence de f .

b) Démontrer que f est croissante sur $]1; +\infty[$.

2. a) Établir que pour tout nombre réel t appartenant à $]1; +\infty[$, on a : $\ln t < t - 1$.

b) En déduire une minoration de $f(x)$ lorsque $x > e$. Préciser alors la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

c) De façon analogue, calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.

3. a) Soient a et b deux nombres réels tels que : $e \leq a < b$.

Établir que : $\frac{b-a}{\ln b} \leq \int_a^b \frac{dt}{\ln t} \leq \frac{b-a}{\ln a}$.

b) Soit x un nombre réel strictement supérieur à e .

Démontrer que : $\forall u \in [e; x], \frac{x-u}{\ln x} \leq f(x) \leq u + \frac{x-u}{\ln u}$.

c) Résoudre l'inéquation $\Phi(x) < x$.

Justifier que l'on peut choisir $u = \Phi(x)$, lorsque $x > e^4$.

Établir alors que :

$$\forall x > e^4, 1 - \frac{\Phi(x)}{x} \leq \left(\frac{\ln x}{x}\right) f(x) \leq \frac{1}{\ln x} + \left[1 - \frac{\Phi(x)}{x}\right] \frac{\ln x}{\ln \Phi(x)}.$$

d) Démontrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln \Phi(x)} = 1$;

en déduire que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right) f(x) = 1$.

e) Vérifier que : $\forall x > e^4, f(x) = \frac{x}{\ln x} [1 + \varepsilon(x)]$,

avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0$.

f) En déduire le comportement asymptotique de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$.

4. a) On cherche à obtenir une valeur approchée de $f(2)$. Soit $h : t \mapsto at + b$ la fonction telle que :

$$h(e) = 1 \text{ et } h(2) = \frac{1}{\ln 2}.$$

Calculer les nombres réels a et b et donner deux valeurs approchées de ces nombres à 10^{-2} près.

On utilisera ces valeurs approchées pour la question 4. b).

b) On prend alors : $f(2) \approx \int_e^2 h(t) dt$. Calculer cette valeur.

5. a) Donner le tableau de variation de f .

b) Construire la courbe représentative de la fonction f .

23 Tchad

Session normale de 1998, séries C et E.

On considère l'application f de $] -1 ; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

- Étudier la continuité de f sur $] -1 ; +\infty[$.
- Étudier la dérivabilité de f sur $] -1 ; +\infty[$.
Expliciter la fonction dérivée f' .
- On note g l'application de $] -1 ; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$.
a) Étudier les variations de g et le signe de $g(x)$.
(On ne demande pas l'étude de la limite de g en -1 .)
b) En déduire les variations de f .
- Étudier les limites de f aux bornes de l'intervalle $] -1 ; +\infty[$.
- Construire la courbe $(\mathcal{C})$. Préciser les asymptotes et la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à l'axe des abscisses.
- Déterminer une équation de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0 et étudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à cette tangente. (On étudiera les variations de l'application h de $] -1 ; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
 $h(x) = x^2\left(\frac{1}{2} + f'(x)\right)$, puis le signe de $h(x)$).

Partie B

- Démontrer qu'il existe un unique nombre réel α de l'intervalle $]0 ; 1[$ tel que : $f(\alpha) = \alpha$.
(On ne demande pas de calculer α).
- On considère la suite (u_n) définie par :
 $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.
b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
(On remarquera que $u_{n+1} - \alpha = f(u_n) - f(\alpha)$ et on utilisera le résultat : $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$.)

c) En déduire que la suite (u_n) converge vers α .

24 Côte d'Ivoire

Session normale de 1999, série C.

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) , l'unité graphique étant égale à 1 cm.

Partie A

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^3 - (6 + i\sqrt{3})z^2 + (11 + 4i\sqrt{3})z - 6 - 3i\sqrt{3} = 0.$$

- Résoudre cette équation en sachant qu'elle a deux solutions réelles.
- On désigne par A, B, C, E et G les points d'affixes respectives 3, $2 + i\sqrt{3}$, -1 , 7 et $11 + 4i\sqrt{3}$.
a) Démontrer que le triangle IAB est équilatéral.
b) Démontrer que les points B, C et G sont alignés.
c) Placer les points A, B, C, E et G.
- Calculer l'affixe du point F de l'axe des abscisses tel que le triangle EFG soit équilatéral.

Partie B

On désigne par O' le centre de gravité du triangle IAB.

- On veut déterminer une homothétie h qui transforme le triangle IAB en EFG.
a) Démontrer que l'image par h de $[IA]$ est $[EF]$.
b) Justifier que la seule homothétie h qui transforme IAB en EFG est telle que :
 $h(I) = E$, $h(A) = F$ et $h(B) = G$.
c) Caractériser h .
- Soit r la rotation de centre O' et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et f la similitude directe telle que : $f = h \circ r$.
a) Donner le rapport et l'angle de f .
b) Démontrer que f transforme le triangle IAB en EFG.
- Soit g une similitude directe qui transforme le triangle IAB en EFG.
a) Démontrer que $h^{-1} \circ g$ est une rotation qui laisse le triangle IAB globalement invariant (c'est-à-dire que le triangle IAB a pour image lui-même).
b) Caractériser les trois rotations qui laissent globalement invariant le triangle IAB.
c) En déduire que les similitudes directes qui transforment IAB en EFG sont h , f et une troisième f' que l'on déterminera à l'aide de h et r .
d) Déterminer le rapport et l'angle de f' .
- Soit Ω le centre de la similitude f . On désigne par K le milieu du segment $[IA]$.
a) Déterminer l'image K' de K par f .
b) Démontrer que Ω , A, G et F sont cocycliques.
c) Démontrer que Ω , F, K et K' sont cocycliques.
d) Construire Ω .
- Déterminer l'application complexe associée à f' .
- Calculer l'affixe du centre Ω' de f' .

INDEX

des notions abordées

A

affinité du plan - 97
 affixe (d'un point, d'un vecteur) - 56
 aires (calculs) - 309
 algorithme d'Euclide - 20
 anneau - 8
 antidéplacement - 88
 antisymétrique (relation) - 6
 application affine - 92
 application linéaire - 94
 application vectorielle - 93
 arc (longueur d') - 312
 archimédien - 9
 arctangente (fonction) - 216
 argument d'un nombre complexe - 62
 associativité d'une loi - 6
 asymptote - 199
 axes d'une conique - 158
 axe imaginaire - 56
 axe réel - 56

B

barycentre - 34
 barycentre partiel - 36
 Bézout (théorème de) - 21
 bifocale (définition) - 161
 binaire (système) - 11
 binôme de Newton - 172
 Bombelli - 61
 bonhomme d'Ampère - 44
 branche infinie - 199
 branche parabolique - 201

C

Calcul approché d'une intégrale - 306
 Cardan - 61
 cas favorables - 180
 cas possibles - 180
 cercle principal - 158
 cercle secondaire - 158
 chaînette - 264
 classification des isométries du plan - 86
 coefficients binomiaux - 173
 coefficient de colinéarité - 92
 combinaison - 172
 commutativité (d'une loi) - 6
 composition d'isométries - 82
 composition de similitudes directes - 107
 concave (fonction) - 219
 congruence - 14
 conique - 149
 coniques à centre - 151
 conjugué d'un nombre complexe - 59
 continuité - 203
 convexe (fonction) - 219
 corde d'une ellipse - 162
 corps - 57
 cosinus hyperbolique - 264
 courbe de Gauss - 261
 courbe intégrale - 322
 croissance comparée de fonctions - 267
 croissance comparée de suites - 282

D

décomposition d'une isométrie - 86
 décomposition d'une rotation - 82
 décomposition d'une translation - 82
 déplacement - 88
 demi-tour - 136
 dérivation - 214
 dérivées successives - 218
 Desargues (théorème de) - 53
 détermination d'une application affine - 94
 détermination d'une isométrie - 89
 déterminations d'une similitude directe - 111
 direction asymptotique - 201
 directrices - 158
 distance focale - 152
 diviseur d'un entier - 12
 division euclidienne - 9

E

écart type - 186
 écriture complexe d'une similitude directe - 106
 écriture complexe de transformations - 71
 éléments caract. d'une similitude directe - 106
 éléments symétriques - 8
 ellipse - 149
 entiers comparables - 6
 épreuve - 176
 épreuve de Bernoulli - 181
 équation caractéristique - 327
 équation différentielle - 322
 équation différentielle linéaire - 324
 équation réduite d'une conique - 150
 équiprobabilité - 180
 espérance mathématique - 185
 événement - 176
 événement certain - 176
 événement contraire - 176
 événement élémentaire - 176
 événement impossible - 176
 événements incompatibles - 176
 événements indépendants - 178
 éventualité - 176
 excentricité d'une conique - 158
 expérience aléatoire - 176
 exponentielle (fonction) - 256
 exponentielle de base a (fonction) - 262
 expression analytique d'une application affine - 97
 extérieur d'une conique - 149

F

facteur d'amortissement - 331
 fonction de répartition - 185
 fonction racine n -ième - 207
 forme algébrique - 56
 forme exponentielle - 65
 forme trigonométrique - 63
 forme réduite d'une similitude - 106
 formules d'Euler - 66
 formule de Moivre - 65
 foyers d'une conique - 158

G

Gauss (théorème de) - 21

gendarmes (théorème des) - 195
globalement invariant - 226
groupe - 8
groupe affine du plan - 93

H

hexadécimal (système) - 11
homothétie vectorielle - 93
hyperbole - 149
hyperbole équilatère - 163

I

image d'une droite par une application affine - 95
image d'un plan par une application affine - 96
imaginaire pur - 56
inégalité de la moyenne - 300
inégalité des accroissements finis - 217
inertie (centre d') - 313
intégrale (d'une fonction) - 296
intégration par parties - 302
intérieur d'une conique - 149

J

jardinier (méthode du) - 161

K

Klein (groupe de) - 101
König (formule de) - 186

L

Leibnitz (formule de) - 230
ligne de niveau - 39
limites d'une fonction - 194
limite d'une suite - 280
logarithme décimal - 247
logarithme népérien - 240
loi binomiale - 186
loi de composition interne - 6
loi de probabilité - 184

M

méthode de Newton - 289
méthode du point fixe - 288
méthode du point médian - 306
méthode des rectangles - 306
méthode des trapèzes - 306
module d'un nombre complexe - 60
multiple d'un entier - 12

N

neutre (élément) - 6
nombres amiables - 32
nombres complexes - 56
nombres de Fermat - 32
nombres de Mersenne - 32
nombres parfaits - 32
nombres premiers - 24
nombres premiers entre eux - 21
nombre transcendant - 242
numération - 10

O

orientation de l'espace - 44
oscillateur mécanique libre - 322
oscillateur mécanique amorti - 330

P

parabole - 149
paramètre d'une parabole - 150
partie imaginaire d'un nombre complexe - 56
partie réelle d'un nombre complexe - 56
petit théorème de Fermat - 27
plan complexe - 56
plan médiateur - 133
PGCD de deux entiers - 18
plus grand élément - 9

PPCM de deux entiers - 17
plus petit élément - 6
point d'inflexion - 219
point image - 56
point invariant par une application affine - 95
primitive - 234
primitives usuelles - 302
principe additif - 174
principe multiplicatif - 174
probabilité - 177
produit vectoriel - 45
projections de l'espace - 124
propriété caractéristique
d'une similitude directe - 108
pseudo-périodique (mouvement) - 331
Ptolémée (théorème de) - 116
puissances (fonctions) - 265
puissance d'exposant rationnel - 207

R

racine n -ième - 66
rectangle d'or - 117
récurrence (raisonnement par) - 7
réflexion - 133
relation d'ordre - 6
relation réflexive - 6
relation symétrique - 14
relation transitive - 6
représentation paramétrique d'une conique - 159
résoudre une équation différentielle - 322
rotation vectorielle - 93

S

schéma de Bernoulli - 181
sommets d'une conique - 158
spirale d'Ulam - 25
suite arithmétique - 278
suites adjacentes - 294
suite bornée - 276
suite convergente - 280
suite divergente - 280
suite de Fibonacci - 293
suite géométrique - 278
suite logarithme - 282
suite monotone - 277
suite numérique - 276
suite puissance - 282
suite stationnaire - 277
surface de niveau - 39
symétrie glissée - 83

T

tableau de composition - 91
transformation affine du plan - 92
triangle de Pascal - 172

U

univers - 176
univers image - 184

V

valeurs intermédiaires (théorème des) - 205
valeur moyenne d'une fonction - 300
variable aléatoire - 184
variance - 186
vecteur image - 56
vitesse moyenne - 301
volumes (calculs de) - 310
Von Aubel (théorème de) - 103